UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 10.12.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 7 — 03.11.2015

Definition und Satz. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion auf $(X, \mathcal{M}, \mu)$, wenn es ein $A \in \mathcal{M}$ mit $\mu(A) < \infty$ und eine messbare Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^r A_i$ gibt, sodass $f|_{A^c} = 0$ und $f|_{A_i}$ konstant ist. Man nennt in diesem Fall f eine Treppenfunktion bzgl. $(A_i)_{i=1}^r$. Mit*

$$St(\mu) = \{f \mid f \text{ Treppenfunktion auf } (X, \mathcal{M}, \mu)\}$$

bezeichnet man den Vektorraum (!) der Treppenfunktionen auf $(X, \mathcal{M}, \mu)$.
Sei $f \in St(\mu)$ eine Treppenfunktion bzgl. $(A_i)_{i=1}^r$ mit $f|_{A_i} = a_i$. Dann definieren wir

$$I(f) := \sum_{i=1}^r \mu(A_i) \cdot a_i$$

und für $A \subset X$

$$\int_A f \; d\mu := I(1_A \cdot f)$$

das μ-Integral von f über A.
Durch

$$St(\mu, Y) \to \mathbb{R}, \; f \mapsto ||f||_1 := \int_X |f| d\mu$$

wird eine Halbnorm auf dem Vektorraum $St(\mu)$ definiert (!).
Eine Folge von Funktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset St(\mu)$ heißt L^1-Cauchyfolge, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$||f_p - f_q||_1 < \varepsilon \text{ für alle } p, q \geq n_0.$$

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt μ-integrabel, falls es eine L^1-Cauchyfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset St(\mu, Y)$ und eine μ-Nullmenge $N \subset X$ gibt mit

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ für alle } x \in X \setminus N.$$

In diesem Fall definieren wir das μ-Integral von f als

$$\int_X f \; d\mu := \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \; d\mu$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie die beiden mit "(!)" gekennzeichneten Aussagen auf der ersten Seite. D.h. beweisen Sie:

(a) $St(\mu)$ is ein Vektorraum bzgl. punktweise definierter Addition und Skalarmultiplikation.

(b) Durch $St(\mu) \to \mathbb{R},\ f \mapsto ||f||_1 := \int_X |f| d\mu$ wird eine Halbnorm auf dem Vektorraum $St(\mu)$ definiert.

Aufgabe 2 (Rückrichtung Blatt 6 Aufgabe 3)**.**

(a) Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt einfach, falls f messbar ist und $f(X) \subset \mathbb{R}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann messbar ist, falls es eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen gibt mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

(b) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass die Rückrichtung von Aufgabe 3 auf Blatt 6 nicht richtig ist, falls wir $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen metrischen Raum ersetzen. D.h. finden Sie einen metrischen Raum (Y, d) und eine Abbildung $f : X \to Y$, welche messbar bzgl. der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(Y)$ (= σ-Algebra erzeugt von allen offenen Mengen von Y) ist, jedoch nicht punktweiser Limes einer Folge von einfachen Funktionen ist.

Aufgabe 3. Sei $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ ein W-Raum und das Wahrscheinlichkeitsmaß μ sei gegeben durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k = 1$. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann μ-integrabel ist, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\mu_k$ absolut konvergent ist.

Aufgabe 4.

(a) Sei $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ ein Maßraum, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Das Maß μ sei wie in Aufgabe 3 durch eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k$ definiert, wobei

$$\mu_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert und berechnen Sie den Erwartungswert $E(f) = \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu$ für die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.

(b) Sei $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$ ein Maßraum und $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Das Maß ν sei wie in Aufgabe 3 durch eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k$ definiert, wobei

$$\nu_k := \frac{c^k}{k!} e^{-c}.$$

Zeigen Sie, dass ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert und berechnen Sie den Erwartungswert $E(f) = \int_{\mathbb{N}} f \, d\nu$ für die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$.