

15.16 De Rham Cohomologie auf abstrakten Mannigfaltigkeiten

M sei eine n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit. Dann haben wir $\Omega^k(M)$ mit dem R -Vektorraum der C^∞ -Schnitte von

$$\Delta^{k-1} \xrightarrow{d} M.$$

Da die äußere Ableitung d mit Koordinatenwechseln verträglich ist der De Rham Komplex

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^n(M) \rightarrow 0$$

definiert und auch die

$$H_{DR}^k(M) = \frac{\text{Ker } (\Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M))}{(\text{im } (\Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M)))}.$$

15.17 Satz: Das \wedge -Produkt induziert eine Ringstruktur auf $H_{DR}^*(M) := \bigoplus H_{DR}^k(M)$.

Beweis: Sind w, η geschlossene k - bzw. l -Formen, dann ist $w \wedge \eta$ eine geschlossene $(k+l)$ -Form

$$d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta = 0 + 0 = 0.$$

Um einzusehen, dass

$$\begin{aligned} H_{DR}^k(M) \times H_{DR}^l(M) &\longrightarrow H_{DR}^{k+l}(M) \\ ([w], [\eta]) &\longmapsto [w \wedge \eta] \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist, ist zu zeigen, dass $(dg) \wedge \eta$ für η geschlossen, exakt ist.

In der Tat:

$$\begin{aligned} d(g \wedge \eta) &= dg \wedge \eta + (-1)^{k+1} g \wedge d\eta \\ &= dg \wedge \eta. \end{aligned}$$

□

15.18 Satz (Poincaré-Dualität): Sei M eine n -dimensionale orientierbare zusammenhängende kompakte \mathbb{R}^m -Folienfaltigkeits. Dann gilt:

- 1) Die De Rham Cohomologigruppen $H_{DR}^k(M)$ sind endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume.
- 2) Integration liefert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} H_{DR}^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [w] &\longmapsto \int_M w \end{aligned}$$

- 3) Das \wedge -Produkt induziert eine perfekte Paarung

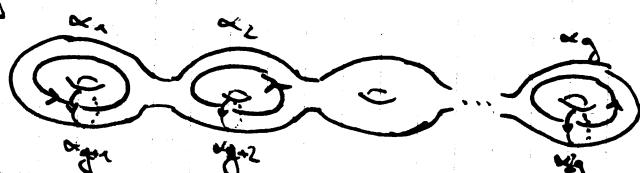
$$\begin{aligned} H_{DR}^k(M) \times H_{DR}^{n-k}(M) &\longrightarrow H_{DR}^n(M) \cong \mathbb{R} \\ ([w], [\eta]) &\longmapsto \int_M w \wedge \eta \end{aligned}$$

Endlich Perfekte Paarung: Vom Bildraum ist der eine Raum der Dualraum des anderen.

Bemerkung: 2) ist wohldefiniert und den Sets von Grau.

Sei η eine $(n-k)$ -Form. Dann gilt $\int_M d\eta = \int_M \eta = 0$.

15.19 Beispiel: M sei eine kompakte orientierbare Fläche vom Geschlecht g

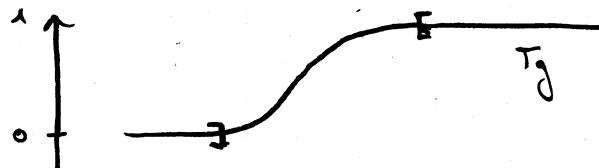


$\eta = \text{Anell der Löcher}$

$$H_{DR}^0(M) = \mathbb{R}, \text{ da } M \text{ zykloid } \rightarrow H_{DR}^2(M) \cong \mathbb{R}. \quad H_{DR}^1(M) = ?$$

Kontrollable einer Basis von $\text{H}^*(\Omega)$ mit Hilfe dieser Wege:

\exists Abbildung U_i von Bild α_i , welche diffeomorph zu $]-\varepsilon, \varepsilon[\times S^1$ ist. Betrachte eine C^∞ -Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Graphen



Dann ist

$$\gamma_i = p_i^* dg_i$$

eine 1-Form mit kompakten Träger auf U_i , die wir durch O auf ganz Ω C^∞ -fortsetzen können.

Behauptung: $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}] \in \text{H}^*(\Omega)$ sind \mathbb{R} -linear unabhängig.

Beweis: Sei $\gamma_i = 1$ für $i \leq g$ und $\gamma_i = 0$ für $i > g$.

$$\int_{\gamma_j} \gamma_k = 0$$

in allen anderen Fällen, da der Träger $\text{supp}(\gamma_k) \cap \text{Bild}(\alpha_j) = \emptyset$.

Eine exakte 1-Form integriert über einen geschlossenen Weg gibt nach Stokes O, die Integrale hängen also nur von der Homotopieklasse ab. Es gilt also: $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2g}]$ sind linear unabhängig. Um einzusehen, dass die $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq g}$ linear unabhängig, bezüglich $\{\nu\} \in \text{H}^1(\Omega)$ und

$$c_1 = \int_{\gamma_1} \nu, \dots, c_{2g} = \int_{\gamma_{2g}} \nu.$$

dass $\nu - (c_1 \gamma_1 + \dots + c_{2g} \gamma_{2g})$ eine exakte Form ist. Dafür reicht es

zu zeigen, dass $\int_{\gamma} w = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in \mathbb{R} .

$$\int_{\alpha_i} w^i = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq g$$

ist klar. Es bleibt zu zeigen, dass (4) $\int_{\alpha_i} w^i = 0$ für $1 \leq i \leq g$ impliziert, dass $\int_{\gamma} w^i = 0$ für alle geschlossenen Wege γ .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \eta_i \wedge \eta_{g+i} &= \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2} g'(x) dx \wedge g'(y) dy \\ &= \int g'(x) g'(y) d(x,y) \\ &= \int g'(x) dx \cdot \int g'(y) dy = 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

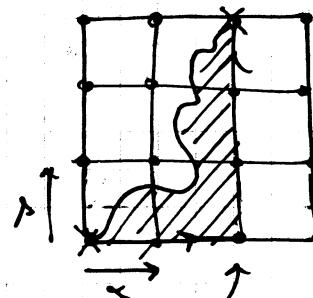
dass $\eta_i \wedge \eta_{g+i}$ kompatibler Träger ist als $\eta_i \wedge \eta_g \equiv]-\epsilon, \epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[$,

$$\int_{\gamma} \eta_{i+g} \wedge \eta_i = -1, \quad \int_{\gamma} \eta_i \wedge \eta_i = 0 \text{ sonst.}$$

Wir zeigen (4) im Fall $g=1$, $\Gamma \cong S_1 \times S_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Wir haben also eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma \\ & \searrow & \downarrow \\ & & g: [0,1] \end{array}$$



$e^{2\pi i w^1}$ ist doppelperiodisch, $\gamma = \alpha + \alpha \circ \lambda \circ \lambda \circ \lambda$:

$$\int_{\gamma} w^1 = 2 \int_{\alpha} w^1 + 3 \int_{\lambda} w^1 = 0.$$

Dies zeigt (4).

C-Gitterpunkte werden unterander identifiziert

15.20:

Mayer-Vietoris für Cohomologie. M sei \mathbb{Z}^m -Komplexfolge mit, $U \cap V = \emptyset$, U, V offen.

$$0 \rightarrow \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U \cap V) \rightarrow 0$$
$$\omega \mapsto \omega|_U + \omega|_V$$
$$(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto (\gamma_1|_{U \cap V} - \gamma_2|_{U \cap V})$$

ist eine exakte Sequenz. Nur die Surjektivität rechts ist nicht offensichtlich. Dazu betrachten wir eine der Überdeckung $\{U, V\}$ zugeordnete Teilung der 1

$$1 = \sum_{x \in J} g_x$$

und eine Zerlegung $J = J_U \cup J_V$, so dass $x \in J_U \Rightarrow \text{supp}(g_x) \subset U$ und $x \in J_V \Rightarrow \text{supp}(g_x) \subset V$. Dann setzen wir

$$\Omega^p(U) \ni g_U = \sum_{x \in J_U} g_x; \quad g_V = \sum_{x \in J_V} g_x$$

und es gilt $g_U|_{U \cap V} = 0$, $g_V|_{U \cap V} = 0$. Zu $\gamma \in \Omega^p(U \cap V)$ setzen wir

$$\Omega^p(U) \ni \gamma_U = \begin{cases} g_V \gamma & \text{auf } U \cap V, \\ 0 & \text{auf } U \setminus V. \end{cases}$$

und

$$\Omega^p(V) \ni \gamma_V = \begin{cases} -g_U \gamma & \text{auf } U \cap V, \\ 0 & \text{auf } V \setminus U. \end{cases}$$

Dann gilt: $(\gamma_U - \gamma_V)|_{U \cap V} = (g_V \gamma + g_U \gamma) = (g_V + g_U) \gamma = 1 \cdot \gamma = \gamma$.
Die Abbildung rechts ist also surjektiv.

Wir erhalten also eine kurze exakte Sequenz der de Rham-Komplexe in Form der folgenden Definition:

15.21 Definition: Es sei (A^i, d_i) und (B^j, d_j) zwei Komplexe. Eine Abbildung zwischen Komplexen ist eine Sequenz von Abbildungen $A^P \rightarrow B^P$, so dass alle Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A^{P+1} & \xrightarrow{d_A} & A^P & \longrightarrow & A^{P+1} \\ \downarrow & \circ & \downarrow & \circ & \downarrow \\ B^{P+1} & \xrightarrow{d_B} & B^P & \longrightarrow & B^{P+1} \end{array}$$

kommutieren. Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A^0 \rightarrow B^0 \rightarrow C^0 \rightarrow 0$$

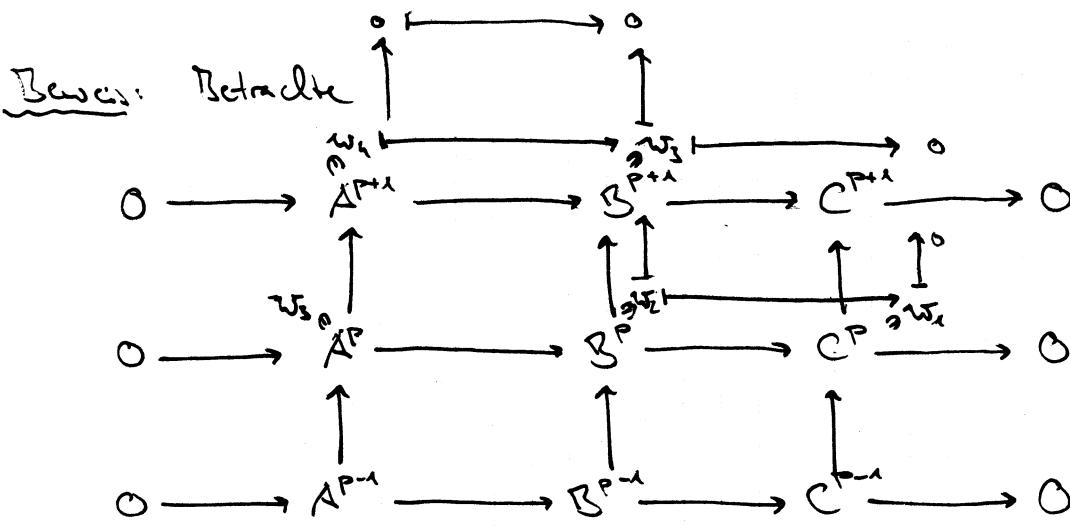
zwischen drei Komplexen und zwei Abbildungen \rightarrow Komplexe, so dass

$$0 \rightarrow A^P \rightarrow B^P \rightarrow C^P \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von \mathbb{R} -Vektorräumen (abzählbare Gruppen) für alle $p \in \mathbb{Z}$ bilden.

15.22 Satz (über die lange exakte Kohomologien-Sequenz): Sei $0 \rightarrow A^0 \rightarrow B^0 \rightarrow C^0 \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Dann induziert diese eine lange exakte Kohomologien-Sequenz

$$\begin{array}{c} \curvearrowright H^{P+1}(A) \rightarrow \dots \\ \curvearrowright H^P(A) \rightarrow H^P(B) \rightarrow H^P(C) \end{array} \quad \dots \rightarrow H^{P+1}(C)$$



$S([w_1]) := [w_1]$, dieses ist wohldefiniert! Angenommen
 $S([w_1]) = [w_1] = 0$. Dann $\exists w_5$ mit $\partial w_5 = w_1$, w_6 sei das
 Bild von w_5 in \mathcal{I}^P . w_6 bildet auf w_3 ab, also $w_2' = w_2 = -w_6$
 ist geschlossen und $[w_2'] \mapsto [w_1]$.

Beweis durch Diagramm folgt.

