Analysis III 14.01.2016

<u>12.14 Bemerkung:</u> Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ eine Basis. Dann bilden die Elemente $\varphi_I \in \Lambda V^*$ mit $\varphi_I := \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$, wobei $I \subset \{1, \dots, n\}$ alle Teilmengen durchläuft, eine Basis von ΛV^*, $\varphi_\emptyset = 1 \in \mathbb{R} = \Lambda^0 V^* \subset \Lambda V^*$. Bezüglich dieser Basis definieren wir das Dachprodukt „$\wedge$" durch

$$\varphi_I \wedge \varphi_J = \begin{cases} \pm \varphi_{I \cup J} & , \text{ wenn } I \cap J = \emptyset \\ 0 & , \text{ wenn } I \cap J \neq \emptyset \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist dabei für $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ und $J = \{j_1 < \dots < j_l\}$ durch die Parität der Zahl der Vertauschungen festgelegt, die man benötigt,

$$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l$$

zu ordnen.

<u>12.15 Satz:</u> Das „$\wedge$"-Produkt macht ΛV^* zu einer assoziative (graduierte) $\mathbb{R}$-Algebra. Für $\omega \in \Lambda^k V^*$, $\eta \in \Lambda^l V^*$ gilt das Kommutativgesetz

$$\omega \wedge \eta = (-1) \eta \wedge \omega .$$

ΛV^* heißt Grassmannalgebra von V^* oder äußere Algebra von V^*.

<u>Beweis:</u> 1) Das Assoziativgesetz

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \varrho = \omega \wedge (\eta \wedge \varrho)$$

für $\omega, \eta, \varrho \in \Lambda V^*$ ist klar nach Formel (**). $1 = \varphi_\emptyset \in \mathbb{R}$ ist das 1-Element.

2) Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & & k+l & 1 & \dots & l \end{pmatrix}$$

läßt sich als Komposition von Transpositionen darstellen. Also gilt nach Lemma 12.12 (2) für $\omega = \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$, $\eta = \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_l}$

$$\omega \wedge \eta = (-1)\, \eta \wedge \omega.$$

Für beliebige $\omega \in \Delta^k V^*$ und $\eta \in \Delta^l V^*$ folgt sie damit aus den Distributivgesetzen des $\wedge$-Produktes (12.13 (1)). $\square$

<u>Beispiel</u>: Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ eine Basis und $\psi_1, \dots, \psi_n \in V^*$ weitere Elemente, etwa

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Dann läßt sich bezüglich der Basis φ_I in ΔV^* $\psi = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$ in der Gestalt

$$\psi = \sum_{|I|=k} c_I \varphi_I$$

mit gewissen Koeffizienten $c_I \in \mathbb{R}$ darstellen.

<u>Behauptung</u>: Für $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ ist

$$c_I = \det \begin{pmatrix} a_{1,i_1} & \dots & a_{1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,i_1} & \dots & a_{k,i_k} \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten: die Koeffizienten sind gerade die $k \times k$ Minoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

Beweis: Sei $e_1, \dots, e_n \in V$ die zu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ duale Basis. Dann gilt nach Bem 12.9

$$\varphi_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & I = \{j_1 < \dots < j_k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

also gilt für $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$

$$\begin{aligned} c_I = \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) &= (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \det(\varphi_j(e_{i_\nu}))_{\substack{\nu = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, k}} \\ &= \det(a_{j,\nu}) \end{aligned}$$

wie behauptet. $\square$

12.17 Definition: Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume und $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann induziert f die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Lambda^k f^* : \Lambda^k W^* &\longrightarrow \Lambda^k V^* \\ \varphi &\longmapsto f^* \varphi \end{aligned}$$

wobei $f^* \varphi$ durch

$$\Lambda^k f^* \varphi(v_1, \dots, v_k) := \varphi(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

definiert. Für $k = 1$ ist $f^* = \Lambda^1 f^* : W^* \to V^*$ die wohlbekannte duale (transponierte) Abbildung.

12.18 Satz: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

1) $\Lambda^k f^* : \Lambda^k W^* \longrightarrow \Lambda^k V^*$ $\mathbb{R}$-linear;
2) $\Lambda^k f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = (f^* \varphi_1) \wedge \dots \wedge (f^* \varphi_k)$ für $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in W^*$.

Insbesondere ist also $\Lambda f^* : \Lambda W^* \to \Lambda V^*$ ein $\mathbb{R}$-Algebren-Homomorphismus der Grassmannalgebra.

Beweis: 1) ist klar.

2) folgt unmittelbar aus der Definition:

$$\begin{aligned}\Lambda^k f^*(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k)(v_1, \dots, v_k) &= \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= \det(\xi_i(f(v_j))) \\ &= \det(f^* \xi_i(v_j)) \\ &= (f^* \xi_1) \wedge \dots \wedge (f^* \xi_k)(v_1, \dots, v_k).\end{aligned}$$

$\square$

12.19 Beispiel: Sei $V = W$ ein n-dimensionaler Vektorraum und $f: V \to V$ ein Endomorphismus gegeben, etwa durch die Matrix $A = (a_{ij})$ bezüglich der Basis $e_1, \dots, e_n$ von V. Ist $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in V^*$ die duale Basis, so wird die duale Abbildung $f^*: V^* \to V^*$ bekanntlich in der dualen Basis durch die Transponierte A^t beschrieben.
$\Lambda^n V^*$ ist 1-dimensional, das Basiselement ist $\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$.

Behauptung:

$$\Lambda^n f^*(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n) = \det(A)\, \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n,$$

oder mit anderen Worten

$\Lambda^n f^*$ ist durch Skalarmultiplikation mit
$\det(f) = \det(A) = \det(A^t) \in R$
gegeben.

Beweis: Nach 12.18 gilt

$$\Lambda^n f^*(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n) = f^* \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge f^* \varepsilon_n.$$

Da $f^* \varepsilon_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \varepsilon_i$ folgt weiter mit (12.16), dass die Koeffizienten $c_{i_1 \dots i_n}$ von $\Lambda^n f^*(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n)$ also

$$c_{1,\dots,n} = \det(A^t) = \det(A) = \det(f) \qquad \square$$

12.20 Bemerkung: 1) Die äußere Algebra erlaubt eine Charakterisierung der Dimension von V

$$\dim(V) = \max\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \Lambda^k V^* \neq 0\}.$$

2) Sie erlaubt die Definition der Determinante $\det(f) \in \mathbb{R}$ ohne Bezug auf Basen zu nehmen. Wie im Beispiel: Da $\Lambda^n V^*$, $n = \dim(V)$, eindimensional ist, ist jeder Endomorphismus von $\Lambda^n V^*$ durch eine Skalarmultiplikation gegeben: $\mathrm{End}(\Lambda^n V^*) \cong \mathbb{R}$. Der von $f: V \to V$, bzw. $f^*: V \to V$ induzierte Endomorphismus

$$\Lambda^n f^* \in \mathrm{End}(\Lambda^n V^*)$$

ist eine reelle Zahl. Man kann also durch

$$\det(f) := \Lambda^n f^* \in \mathbb{R}$$

die Determinante definieren.

Diese abstrakte Definition der Determinante verschleiert aber die geometrische Bedeutung der Determinante. $\det(A)$ ist bis auf Vorzeichen das Volumen des von den Spaltenvektoren / Zeilenvektoren von A aufgespannten Parallelotops.

3) Ist W ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so ist die Grassmannalgebra von W

$$\Lambda W = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k W$$

durch $\Lambda W = \Lambda V^*$ definiert, wobei $V = W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbb{R})$ der Dualraum ist. Da $(W^*)^* \cong W$ kanonisch isomorph ist, ist $V^* \cong W$ sinnvoll. Für $f \in \mathrm{End}(W)$ bezeichnet dann $\Lambda^k f^* \in \mathrm{End}(\Lambda^k W)$ die von $f^* : W^* \to V^*$ induzierte Abbildung.

4) Die äußere Algebra kann man für endlichdimensionale Vektorräume über anderen Körpern definieren. Lediglich wenn $\mathrm{char}(K) = 2$ gilt, muss die richtige Definition für alternierend verwendet werden – nämlich unsere (12.5).