UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Algebra

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am 11.01.2018, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 11

04.01.2018

Aufgabe 1. Sei $R = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$F(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i \cdot t) = 1 + s_1 t + \cdots + s_n t^n \in R[[t]]$$

invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die logarithmische Ableitung von F gilt

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + x_i \cdot t} \in R[[t]]$$

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $p_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$ die k-te Potenzsumme. Folgern Sie aus Aufgabenteil (b), dass

$$s_1 + 2s_2 t + \cdots + n s_n t^{n-1} = F(t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i p_{i+1} t^i \right) \in R[[t]]$$

und

$$k \cdot s_k = p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} + p_3 s_{k-3} \pm \cdots + (-1)^{k-2} p_{k-1} s_1 + (-1)^{k-1} p_k$$

gilt.

(d) Folgern Sie, dass $p_1, \dots, p_n$ den Ring der symmetrischen Polynome über $\mathbb{Q}$, jedoch nicht über $\mathbb{Z}$, erzeugen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie explizit die Kreisteilungspolynome $\phi_7, \phi_8, \phi_9 \in \mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, welche nicht durch 3 teilbar ist. Zeigen Sie, dass der Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann.

Aufgabe 4. Sei $f = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass f keine reelle Nullstelle hat und über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

(b) Sei

$$f = (x - a)(x - \overline{a})(x - b)(x - \overline{b}) \in \mathbb{C}[x]$$

die Zerlegung von f in Linearfaktoren. Zeigen Sie, dass $c = a\overline{a} + b\overline{b}$ eine Nullstelle von $x^3 - 4x - 1$ ist. (Hinweis: Berechnen Sie c^4).

(c) Zeigen Sie, dass $a, \overline{a}, b, \overline{b}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, jedoch

$$[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\overline{a}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\overline{b}) : \mathbb{Q}] = 2^2.$$