UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Algebra

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am 18.01.2018, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 12

11.01.2018

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(X^n-2)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ist, wobei $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi(x) = ax+b \mid a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$.

(b) Sei $p > 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(X^p - 2) \cong \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(X^8 - 2) \subsetneq \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$. (Hinweis: Man überlege sich hierzu, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\zeta_8)$).

Aufgabe 2. (a) Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G und sei N ein Normalteiler von G mit $H \cap N = \{e\}$. Dann ist HN eine Untergruppe von G mit

$$(hn)(h'n') = hh'(h'^{-1}nh')n' \text{ für alle } h, h' \in H \text{ und } n, n' \in N$$

Dabei ist $h'^{-1}nh' \in N$ da N ein Normalteiler ist. Das Produkt $(hn)(h'n')$ lässt sich also als $(h''n'')$ schreiben mit $h'' = hh'$ und $n'' = (h'^{-1}nh')n'$.
Zeigen Sie, dass $H \times N$ bezüglich der Verknüpfung

$$(h, n) \circ (h', n') := (hh', (h'^{-1}nh')n')$$

eine Gruppe ist. Man nennt diese Gruppe das *Semidirekten Produkt* und schreibt $H \ltimes N$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \ltimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 3. Sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass ζ^{-1} ebenfalls eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) \supset \mathbb{Q}$. (Hinweis: Betrachten Sie den Automorphismus φ von $\mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\varphi(\zeta) = \zeta^{-1}$).

Aufgabe 4. Sei $f = x^7 - 10x^5 + 15x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(f) \cong S_7$.