UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Algebra

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am 25.01.2018, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 13 18.01.2018

Aufgabe 1. (a) Sei G eine endliche Gruppe, welche auf einer endlichen Menge X operiert. Zeigen Sie, dass

$$|G| \cdot |X/G| = \sum_{g \in G} \big|\{x \in X \mid gx = x\}\big|.$$

(Hinweis: Sei $Y = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$. Betrachten Sie die Urbilder der Projektionen $(g, x) \mapsto g$ und $(g, x) \mapsto x$).

(b) Auf wie viele Arten können die Seiten eines Würfels mit den Farben rot, weiß und blau gefärbt werden, sodass jede Seite eine Farbe hat und die Färbung nicht durch Rotation des Würfels aus einer bereits berücksichtigten Färbung entsteht?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ gibt. (Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine solche Gruppe gibt und betrachten Sie die Operation dieser Gruppe auf die 5-Sylowgruppen.)

Aufgabe 3. Sei $R = \mathbb{Z}[x]$ und die Ideale

$$I = \{f \in R \mid f(1) \equiv 0 \bmod 3\},\ J = (3)$$
$$K = (x-1),\ L = \{3p + (x-1)q \mid p, q \in R\}$$
$$M = (10, x).$$

(a) Zeigen Sie, dass I und L tatsächlich Ideale sind.
(b) Zeigen Sie $J \not\subset K$, $K \not\subset J$, $J, K \subset L \subset I$.
(c) Geben Sie ein Element in $(J \cap K) \setminus 0$ an.
(d) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von $L \cdot M$.
(e) Zeigen Sie, dass K ein Primideal ist, indem Sie einen surjektiven Ringhomomorphismus $\phi : R \to \mathbb{Z}$ mit $\ker \phi = K$ konstruieren.
(f) Zeigen Sie, dass J ein Primideal ist, indem Sie einen surjektiven Ringhomomorphismus $\psi : R \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ mit $\ker \psi = J$ konstruieren.
(g) Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal ist, indem Sie einen surjektiven Ringhomomorphismus $\rho : R \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit $\ker \rho = I$ konstruieren.
(h) Zeigen Sie $I = L$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{7}$ über $\mathbb{Q}$. Welche Zwischenkörper gibt es in der Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$.