UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Algebra

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am 23.11.2017, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 5 — 16.11.2017

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass

$$I := \{r \in R \mid r^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \subset R$$

ein Ideal von R ist. Bestimmen Sie dieses Ideal für $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring. Für ein Ideal $I \subset R$ definieren wir das Radikalideal von I als

$$\operatorname{rad}(I) = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rad}(I) \subset R$ ist ein ideal das I enthält.

(b) Seien $I, J \subset R$ Ideale und

$$IJ = \Big\{ \sum_{\text{endlich}} x_i y_i \mid x_i \in I \text{ und } y_i \in J \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{rad}(IJ) = \operatorname{rad}(I \cap J) = \operatorname{rad}(I) \cap \operatorname{rad}(J)$.

(c) Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $L \subset S$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $\varphi^{-1}(\operatorname{rad}(L)) = \operatorname{rad}(\varphi^{-1}(L))$.

Aufgabe 3. Sei $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass S noethersch ist, falls R noethersch ist.

Aufgabe 4. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$I(A) := \big\{ f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \;\big|\; f(a) = 0 \;\forall a \in A \big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $I(A)$ ein Ideal ist.

(b) Polynome $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ definieren stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und die Einschränkung dieser Funktionen auf A liefert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] &\to \mathcal{C}(A) := \big\{ f : A \to \mathbb{R} \text{ stetig} \big\} \\ f &\mapsto f|_A \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I(A) \cong \operatorname{Bild}(\varphi)$.