UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Algebra

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am 30.11.2017, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 6 — 23.11.2017

Aufgabe 1. Sei $R = \mathcal{C}[0,1]$ der Ring der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall. Zeigen Sie, dass R nicht noethersch ist.

Aufgabe 2. Die Menge der formalen Potenzreihen

$$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

wird bezüglich der komponentenweisen Addition und der Multiplikation definiert durch

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k$$

zu einem Ring. Welches sind die Einheiten in $\mathbb{R}[[x]]$? Zeigen Sie, dass jedes Ideal $0 \neq I \subset R$ von der Form $I = (x^m)$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 3.
(a) Sei R ein Hauptidealring. Zeigen Sie, dass jedes Primideal $I \subset R$ ein maximales Ideal ist.
(b) Zeigen Sie, dass das Ideal $(3, 2+\sqrt{-5}) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht das Einsideal ist.
<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie ein maximales Ideal, dass das Ideal $(2+\sqrt{-5})$ enthält.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind.
(i) $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$
(ii) $2x^4 + 200x^3 + 2000x^2 + 20000x + 20 \in \mathbb{Q}[x]$
(iii) $x^2y + xy^2 - x - y + 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$