



## Übungen zur Algebra

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am 07.12.2017, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: [www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/](http://www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/)

### Blatt 7

30.11.2017

**Aufgabe 1.** Sei  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix und sei  $M = \mathbb{Z}^n / \text{Bild}(A)$ . Zeigen Sie: Ist  $\det(A) \neq 0$ , dann ist  $M$  endlich und es gilt  $|M| = |\det(A)|$ .

**Aufgabe 2.** Für zwei  $R$ -Moduln  $M$  und  $N$  ist  $\text{Hom}_R(M, N)$  mit der induzierten Verknüpfung

$$(r\varphi + s\psi)(m) = r\varphi(m) + s\psi(m) \quad \text{für } \varphi, \psi \in \text{Hom}_R(M, N) \text{ und } r, s \in R$$

ebenfalls ein  $R$ -Modul.

- (a) Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln und sei  $f : M' \rightarrow M$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus. Zeigen Sie, dass dann auch die Abbildung

$$\text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M', N), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

induziert durch Komposition, ein  $R$ -Modulhomomorphismus ist.

- (b) Sei  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Zeigen Sie, dass dann auch

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M', N)$$

exakt ist, wobei die letzte Abbildung nicht notwendigerweise surjektiv sein muss.

**Aufgabe 3.** Seien  $L, M$  und  $N$   $R$ -Moduln. Zeigen Sie:

- (a) Ist  $L \subset M \subset N$ , dann ist

$$(N/L)/(M/L) \cong N/M.$$

- (b) Ist  $L, M \subset N$ , dann ist

$$(L + M)/M \cong L/(L \cap M).$$

**Aufgabe 4.** Lassen sich die folgenden Konfigurationen von Zahnrädern ineinander überführen? Falls ja, um wieviele Schritte muss man dafür drehen?

