Algebra

§1 Gruppen

Def 1.1 Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto a \circ b = a \cdot b = ab$ die folgenden Axiomen genügt:

(G1) Assoziativität

(G2) Existenz eines neutralen Elements

(G3) " von Inversen

Gilt darüberhinaus

(G4) Kommutativität $ab = ba$

dann nennt man die Gruppe abelsch

Bemerkung 1) Es reicht die Existenz eines linksneutralen Elements und $a^{-1}a = e$ zu fordern.

2) in abelschen Gruppen verwendet man meist $+$ als Verknüpfungszeichen

Bsp: • $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sind abelsch

• K Körper. Dann ist $GL(n, K)$ bzgl. Matrizenmultiplikation eine Gruppe

• $\{1, \dots, n\} = M$ eine endliche Menge. Die Menge

$S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$ ist bzgl. Komposition von Abb. eine Gruppe mit $n!$ vielen Elementen Gruppe der Permutationen

• $E(n)$ die Menge der euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^n$ Abb. für die gilt $d(f(a), f(b)) = d(a,b)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Bewegung ist affin linear.

$f(x) = f_{A,b}(x) = Ax + b$, wobei A eine orthogonale Matrix ist und $b \in \mathbb{R}^n$ einer Translationsvektor

$f_{A,b} \circ f_{C,d} = f_{AC, Ad+b}$ denn $A(Cx+d) + b = ACx + (Ad + b)$

Ist f orientierungserhaltend dann gilt $A \in SO(n)$ und $SE(n) = \{f_{A,b} \mid A \in SO(n)\}$ ist eine Untergruppe im $E(n)$

Def. 1.3 Eine Teilmenge U einer Gruppe G ist eine Untergruppe wenn,
(U1) (U2) (U3) erfüllt sind.

Bem: Es reicht $U \neq \emptyset$ und $a, b \in U \Rightarrow ab^{-1} \in U$ zu fordern
U mit der Verknüpfung $\circ|_{U \times U} : U \times U \to U$ ist eine Gruppe.

Beispiele: · $SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$

$SE(n) \subset E(n)$

$A(n) \subset S_n$

Gruppe d. geraden Permutation

$$\begin{array}{ccccc} S_n & \hookrightarrow & O(n) & \subset & GL(n, \mathbb{R}) \\ \cup & & \cup & & \\ A_n & \hookrightarrow & SO(n) & & \end{array}$$

Def. 1.4 Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Eine (links) Operation von G auf M ist eine Abbildung

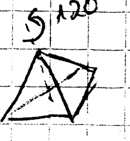
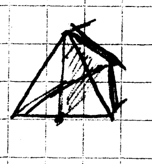
$$G \times M \to M, \quad (g, m) \mapsto g.m \quad \text{die}$$

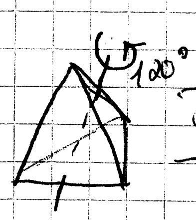
O1) $e\,m = m \;\forall m \in M$ O2) $(ab)m = a(bm) \;\forall a, b \in G \;\forall m, M$

Beispiele 1) $GL(n, K)$ operiert auf K^n
2) S_n operiert auf $\{1, \dots, n\}$
3) $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Die Symmetriegruppe von K ist

$$S(K) = \{f \in E(n) \mid f(K) = K\}$$

4) T reguläres Tetraeder  $S(T) \cong S_4$

da die Symmetrie $S(T)$ durch die Wirkung auf den Ecken eindeutig bestimmt ist. $(1\,2\,3)$  $(1\,2)$  Spiegelung an der Ebene die durch $\frac{e_1+e_2}{2}$ und der Kante $e_3 e_4$ aufgespannt wird.

$(1\,2)(3\,4)$  Drehung mit Achse

$$\frac{e_1+e_2}{2}, \frac{e_3+e_4}{2}$$

Def 1.5 Sei $G \times M \to M$ eine Operation, $m \in M$. Dann heißt

$$Gm = \{ g\, m \mid g \in G \} \subset M$$

die Bahn oder das Orbit m.

Mit

$$G\backslash M = \{ Gm \mid m \in M \} \subset 2^M \text{ (Potenzmenge)}$$

wird als Bahnenraum bzw. Menge d. Bahnen bezeichnet.

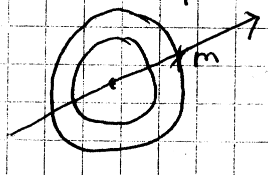
~~Zu~~ $m \in M$ bezeichnet

$$\mathrm{Stab}(m) = \{ g \in G \mid gm = m \}$$ den Stabilisatorraum

$\Rightarrow$ Untergruppe

Beispiel

$SO(2)$ Operation auf $\mathbb{R}^2$



$\mathrm{Stab}(0) = SO(2)$

$\mathrm{Stab}_{O(2)}(m) = \{ id, s \}$

Spiegelung

Bemerkung

Für je 2 Bahnen Gm, Gn einer Operation gilt entweder

$$Gm \cap Gn = \emptyset \quad \text{oder} \quad Gm = Gn$$

Bew: $x \in Gm \cap Gn$ etwa $x = gm = hn \Rightarrow m = g^{-1} h n$

$\Rightarrow Gm \subset Gn$ und umgekehrte Inklusion zeigt man genauso $\square$

Also in der gleichen Bahn sein ist eine Äquivalenzrelation auf M.

$G\backslash M$ ist die Menge der Äquivalenzklassen und $M \to G\backslash M$, $m \mapsto Gm$ die kanonische Klassenabb.

Beispiel: Zyklenschreibweise von Permutationen

Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$ eine Permutation in Wertetabellenschreibweise.

Die Vielfachen von σ $\langle \sigma \rangle = \{ e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^d = e \} \subset S_n$

$\langle \sigma \rangle$ operiert auf $\{1, \ldots, n\}$ und zerlegt diesen Raum in Bahnen

Bsp: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 1$ Bahn $\{1, 3, 5, 7\}$

$2 \to 6 \to 4 \to 2$ Bahn $\{2, 6, 4\}$

Zykel $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ paarweise versch.
Bezeichnet $(i_1\ i_2 \dots i_k)$ die ~~Zykelschreib~~ zyklische Vertauschung $i_1 \to i_2 \to i_k$ alle anderen Elem. bleiben fest.

$$\sigma = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 6\ 4) = (6\ 4\ 2)(3\ 5\ 7\ 1)$$

$$(1\ 2)(2\ 3) = (3\ 1\ 2) = (1\ 2\ 3)$$

Def. 1.6 (Nebenklassen)
Sei $H \subset G$ eine Untergr. Die Menge der Form $gH = \{gh \mid h \in H\} \subset G$ heißen linke Nebenklassen von G und $Hg = \{hg \mid h \in H\} \subset G$ heißen rechte Nebenklassen von H.

<u>Bem</u>: Die rechten Nebenklassen sind gerade die Bahnen der Operation $H \times G \to G$ von H auf G.
Die linken Nebenklassen analog die Bahnen einer rechten Operation $G \times H \to G$.

$$H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\},\ G/H = \{gH \mid g \in G\} \subset 2^G$$

bezeichnet die Entsprechenden Bahnenräume

<u>1.7 Satz</u> Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Je zwei Nebenklassen haben gleichviele Elemente $|gH| = |g'H| = |Hg|$
Dabei bezeichnet $|M|$ die Anz. d. Elemente einer Menge. Ferner gilt $|H\backslash G| = |G/H|$.
<u>Beweis</u>: Die Abbildung $H \to gH$ $h \mapsto gh$ ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung induziert durch Multiplikation mit g^{-1}.
Die Abbildung "Inverse" $G \to G$ $g \to g^{-1}$ induziert eine Bijektion $gH \to Hg^{-1}$ da $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in Hg^{-1}$
und außerdem eine Bijektion $G/H \to H\backslash G$ $gH \to Hg^{-1}$

<u>Def 1.8</u> Die Anzahl $[G:H] = |G/H| = |H\backslash G|$ heißt Index der Untergruppe H in G.
<u>Satz 1.9</u> (Indexsatz von Lagrange)
$H \subset G$ Untergr. Dann gilt $|G| = |G:H| \cdot |H|$

Bem $|G| = \mathrm{ord}(G)$ nennt man auch die Ordnung der Gruppe.

Bem Ist $|H| = \infty$ oder $|G/H| = \infty$ dann auch $|G| = \infty$ und die Formel gilt mit der Konvention $\infty \cdot \infty = \infty c = c \infty = \infty$

Sei nun $|H| < \infty$, $[G:H] < \infty$

$$|G| = \sum_{gH \in G/H} |gH| \quad \text{, da die Linksnebenklassen disjunkt sind}$$

$$= \sum_{gH \in G/H} |H| \quad \text{, da die Nebenklassen gleich viele Elemente haben}$$

$$= |G/H|\,|H| = [G:H]\,|H| \quad \square$$

Satz 1.10 G operiere auf M, $m \in M$. Dann gilt

$$|Gm| = |G : \mathrm{Stab}(m)|$$

Beweis Setzen wir $H = \mathrm{Stab}(m)$ und betrachten die Abb

$$G/H \to Gm$$

$$gH \to gm$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $ghm = gm$ für $h \in H = \mathrm{Stab}(m)$

Die Abbildung ist surjektiv und injektiv, da

$$g_1 m = g_2 m \Rightarrow g_1^{-1} g_2 m = m \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$$

$$g_1 H = g_1 g_1^{-1} g_2 H = g_2 H \text{ gilt.}$$

Beispiel. Symmetriegruppe des Würfels

$W =$  $|S(W)| = ?$

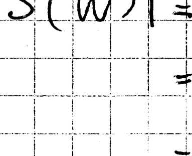
Der Stabilisator einer Ecke ist $\cong S_3$

$$|S(W)| = |S(W) : \mathrm{Stab}(e)|$$

$$= |S(W)e_1| \cdot |S_3|$$

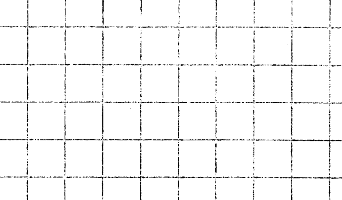
$$= 8 \cdot 6 = 48$$

Anderer Punkt: Kanten Mitte x $\quad \mathrm{Stab}(y) = \{e\}$



$$|S(W)x| = 12$$

$$\mathrm{Stab}(x) = \{s_1, s_2, d, e\}$$



1.11 Def Seien G und G' Gruppen. Ein (Gruppen)homomorphismus $\varphi: G \to G'$ ist ~~die~~ eine Abbildung, die
$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad \forall a, b \in G$$
erfüllt.

Bem 1) Aus $\varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) \cdot \varphi(e)$ folgt $\varphi(e) = e'$, das 1-Element e von G wird auf das 1-Element $e' \in G'$ abgebildet.

2) Ist φ bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: G' \to G$ ebenfalls ein Homomorphismus

$$a' = \varphi(a), \quad b' = \varphi(b)$$
$$\Rightarrow \varphi^{-1}(a') = a, \quad \varphi^{-1}(b') = b$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = a'b'$$
$$\varphi^{-1}(a'b') = ab = \varphi^{-1}(a') \varphi^{-1}(b')$$

3) Einen bijektiven Gruppenhomomorphismus nennt man einen Isomorphismus und schreibt $G \cong G'$.

Beispiele: 1) $T \subset \mathbb{R}^3$ der (reg.) Tetraeder. $S(T) \to S_4$
$f \mapsto \sigma$ = Wirkung auf die Ecken

Dies ist ein Isomorphismus.

2) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definiert einen Isomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ da $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ gilt.
Die Umkehrabbildung $\ln: (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ der Logarithmus ebenfalls

3) $\det: GL(n, K) \to K^*$ ist ein Homomorphismus da
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

4) (Permutationsdarstellung) $\varphi: S_n \to GL(n, \mathbb{R})$
$e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)^t \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor,
$\sigma \in S_n \quad \varphi(\sigma) = \left(e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}\right)$.
φ ist ein Homomorphismus. $\varphi(\tau\sigma) = \varphi(\tau)\varphi(\sigma)$ $\cancel{\text{da } \varphi(\tau)}$
da $\varphi(\tau) e_{\sigma(i)} = e_{\tau(\sigma(i))} = e_{(\tau\sigma)(i)}$

5) $\operatorname{sgn}: S_n \to (\{\pm 1\}, \cdot) \quad \operatorname{sgn} \sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{\pm 1\}$

6) $\varphi: G_1 \to G_2$ und $\psi: G_2 \to G_3$ Gruppenhomomorph.
$\Rightarrow \psi \circ \varphi: G_1 \to G_3$ ist ebenfalls ein Homomorphismus.

Bsp

$$\begin{tikzcd} S_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "sgn"'] & GL(n,\mathbb{R}) \arrow[d, "\det"] \\ & \mathbb{R}^* \end{tikzcd}$$

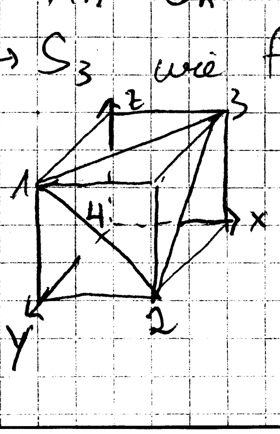
7) G Gruppe dann ist
$\mathrm{Aut}\, G = \{\varphi: G \to G \mid \varphi$ Isomorphismus$\}$ selbst eine Gruppe

8) V Vektorraum $GL(V) = \{\varphi: V \to V \mid \varphi$ isom.$\}$ Gruppe.

1.12 Satz + Def $\varphi: G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus.
Dann ist $\ker \varphi = \{g \in G_1 \mid \varphi(g) = e \in G_2\}$ eine Untergruppe von G_1, der Kern von φ und $\mathrm{Im}\, \varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G_1\} \subset G_2$ das Bild von φ eine Untergruppe von G_2. Ferner φ inj. $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{e\}$.

Bew: $a, b \in \ker \varphi$ $\quad \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = e \cdot e = e \Rightarrow ab \in \ker \varphi$
$e = \varphi(e) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) \Rightarrow (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$
Insbesondere:
$a \in \ker \varphi \Rightarrow a^{-1} \in \ker \varphi$ $\quad \mathrm{Im}\, \varphi$ eine Gruppe geht ähnlich.
Schließlich $\ker \varphi = \{e\}$ ist notwendig für die Injektivität.
Auch hinreichend, da $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a^{-1}b) = e$
$\Rightarrow a^{-1}b = e \Rightarrow a = b$ gilt $\square$

Beispiele: 1) $\varphi: S_n \to GL(n, \mathbb{R})$ Permutationsdarstellung
$\ker \varphi = \{e\}$ und $\mathrm{Im}\, \varphi \subset GL(n,\mathbb{R})$ ist die Menge der Permutationsmatrizen.
2) $\ker sgn = A_n \subset S_n$
3) $\varphi: S_4 \to S_3$ wie folgt



Jede Bewegung des Tetraeders induziert eine Bewegung des Würfels und damit eine Permutation der Koordinatenachsen:
$(1\,2\,3) \mapsto (y\,x\,z)$

$(1\ 2) \mapsto (x\, z)$

$(1\ 2)(3\ 4) \mapsto e$

φ ist ein Gruppenhomomorphismus

$\ker \varphi = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} := V_4$

V_4 heißt ~~4-er Gr~~ kleinsche 4-er Gruppe

4) G Gruppe, $g \in G$ $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \to G$ $\quad n \mapsto g^n = \begin{cases} g^n & n \geq 0 \\ (g^{-1})^{-n} & \text{für } n < 0 \end{cases}$

Das Bild von φ ist $\varphi(\mathbb{Z}) = \langle g \rangle \subset G$ ist die Untergruppe die von g erzeugt wird. $\operatorname{ord} g = |\langle g \rangle|$ heißt Ordnung von g

Das Bild von φ ist $\varphi(\mathbb{Z}) = \{\dots g^{-1}, 1, g, g^2, \dots\}$

Ist ~~$\operatorname{ord} g < \infty$~~. $\operatorname{ord} g = d < \infty$, dann ist

$\langle g \rangle = \langle g, g^2, \dots, g^d = e \rangle$ andernfalls

$\langle g \rangle \cong (\mathbb{Z}, +)$

Frage: Welche Untergruppen $H \subset G$ tauchen als Kern eines Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \to G'$ auf?

$h \in H = \ker \varphi$, $g \in G$, $\varphi(g h g^{-1}) = \varphi(g)\, \varphi(h)\, \varphi(g^{-1})$

$= \varphi(g) \cdot (\varphi(g))^{-1} = e$

$\Rightarrow g h g^{-1} \in \ker \varphi = H$

und somit gilt: $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\} = H \subset G$

1.13 Def Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt Normalteiler in G, wenn $gHg^{-1} = H$ $\forall g \in G$ gilt.

Schreibweise: $H \trianglelefteq G$

Notwendig dafür ~~ist~~, dass $H \subset G$ ein Kern eines Gruppenhom ist, ist dass H ein Normalteiler in G ist. Dies ist hinreichend.

1.14 Satz Sei $H \subset G$ ein Normalteiler

1) Es gibt genau eine Gruppenstruktur auf G/H sodass die Restklassenabbildung $\pi: G \to G/H$, $g \mapsto gH$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

2) Ein Gruppenhomomorph. $\varphi: G \to G'$ faktorisiert über G/H

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/H \arrow[ur, "\bar\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

mit einem Gruppenhom $\bar\varphi$ genau dann wenn $\ker\varphi \supset H$.
In diesem Fall ist $\bar\varphi$ durch φ eindeutig bestimmt.
Bew: 1) Damit die Restklassenabb ein Gruppenhom. wird, muss die Verknüpfung auf G/H repräsentantenweise definiert sein:
$(g_1 H)(g_2 H) = (g_1 g_2)\cdot H$ muss gelten.
Definieren wir eine Abbildung
$G/H \times G/H \to G/H$
auf diese Weise, so ist die Wohldefiniertheit zu zeigen:
Für $g_1' = g_1 h_1$, $g_2' = g_2 h_2$ mit $h_1, h_2 \in H$ ist $g_1' g_2' \in g_1 g_2 H$ zuzeigen.
Nun impliziert $gHg^{-1} = H$ dass $gH = Hg$ gilt.
Also zu $h_1 g_2$ existiert ein $h_1' \in H$ mit $g_2 h_1' = h_1 g_2$
$\Rightarrow g_1' g_2' = g_1 h_1 g_2 h_2 = g_1 g_2 \underbrace{h_1' h_2}_{\in H} \in g_1 g_2 H$
$\ker \pi = H = \pi^{-1}(H \in G/H)$
zu 2) Faktorisiert φ wie angegeben, dann gilt $H \subset \ker\varphi$
umgekehrt gilt $H \subset \ker\varphi$ so definieren wir
$\bar\varphi(gH) \stackrel{!}{=} \varphi(g)$ und das ist die einzige Möglichkeit damit das

Diagram
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/H \arrow[ur, "\bar\varphi"'] & \end{tikzcd}$$
kommutiert

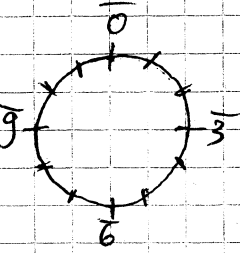
Also $\bar\varphi$ ist durch φ eindeutig bestimmt. Bleibt zu zeigen, dass $\bar\varphi(gH) = \varphi(g)$ wohldefiniert ist.
Sei $gh \in gH$ so gilt $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g) e = \varphi(g)$ wegen $H \subset \ker\varphi$ □
1.14 Homomorphiesatz. Sei $\varphi: G \to G'$ ein Gruppenhom.
Dann gilt $G/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$
Bew Der induzierte Homom. $\bar\varphi: G/\ker\varphi \to G'$
landet in $\varphi(G) = \operatorname{Im}\varphi$ und hat den gleichen Kern.

Also $G/_{\ker\varphi} \to \operatorname{Im}\varphi$ ist inj. und surjektiv $\square$

1.15 Satz Die Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind die Gruppen
$$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \text{ für } n \geq 0$$

Bew: Sei $H \subset (\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe $H \neq \{0\}$
Betrachten wir $n = \min\{h \in H \mid h > 0\} \in H$
Dann gilt $n\mathbb{Z} \subset H$. Wir zeigen die Gleichheit
Sei $a \in H$ bel. Division mit Rest gibt uns eine Darstellung
$$a = qh + r \text{ mit } q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n$$
Wegen $a, n \in H$ ist auch $r = a - qn \in H$ und $0 \leq r < n$
impliziert $r = 0$ also $a - qn \in n\mathbb{Z}$ $\square$

1.16 Für $n > 0$ hat die Quotientengruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau
n Elemente: Jede Nebenklasse $a + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat genau
einen Repräsentanten r mit $0 \leq r < n$
Die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind also $\{n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, \ldots, (r-1)n\mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$
Die Addition in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist repräsentantenweise $\bar{i} + \bar{j} = \overline{i+j}$
Häufig stellt man sich die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als zyklisch angeordnet vor.
Bsp $\mathbb{Z}/_{12}\mathbb{Z}$



Man nennt daher $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine zyklische Gruppe und die Schreibweise
$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist auch üblich

Allgemeiner nennt man eine Gruppe G zyklisch, wenn es ein surjektiven Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to G$ gibt
$\langle \varphi(1) \rangle = G$
Also zyklische Gruppen sind isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ falls $|G| = n$

1.17 Satz + Def Sei G eine Gruppe. Dann definiert

$G \times G \to G \quad (g,h) \mapsto ghg^{-1}$ eine Operation

von G auf sich selbst, die Operation durch Konjugation, da

$(g_1 g_2, h) \mapsto g_1 g_2 h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1}$ gilt

Die Bahnen von h unter dieser Operation

$C_h = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$ heißt Konjugationsklasse von G.