10.6 Corollar Sei M eine strickt induktiv geordnete Menge. Dann hat M ein maximales Element. ①

Bew: Angenommen es gibt kein maximales Element. Dann sind die Mengen $M_x = \{y \in M / x < y\} \neq \emptyset \ \forall x \in M$

Das Auswahlaxiom gibt uns eine Abbildung $f: M \to M$ $f(x) \in M_x \ \forall x$ d. h. $x < f(x)$. Nach dem Satz hat f einen Fixpunkt, ein Widerspruch.

10.7 Satz (Haussdorff) Sei M eine partiell geordnete Menge. Dann gibt es eine maximale Kette in M.

Beweis. Die Menge $\mathcal{M} = \{K \subset M \mid K \text{ Kette}\}$ ist bzgl. Inklusion partiell geordnet und für $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ eine Kette ist $\tilde{K} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ eine Kette, die obere Grenze ist.

Nach dem Corollar gibt es eine maximale Kette in M.

Bew des Zornschen Lemmas

Sei K eine maximale Kette in $\mathcal{M}$ und $z \in M$ eine obere Schranke.
Für jedes $y \in M$ mit $y \geq z$ ist $K \cup \{y\}$ ebenfalls eine Kette. Wegen der Maximalität gilt $y \in K$.
Also $y \geq z$ ~~...~~ $\Rightarrow z \geq y$. also $z = y$, $z \in M$ ist ein maximales Element $\square$

Bem Zornsche Lemma $\Leftrightarrow$ Auswahlpostulat

Bew: Zornsche Lemma $\Rightarrow$ Auswahlpostulat

Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von nicht leeren Mengen und $M = \bigcup_{i \in I} M_i$

Wir betrachten $\mathcal{M} = \{(J, f) \mid J \subset I, f: J \to M$ eine Abbildung ~~eine Abbildung~~ mit $f(j) \in M_j \ \forall j \in J\}$

$\mathcal{M}$ ist partiell geordnet durch $(J_1, f_1) \leq (J_2, f_2)$ falls $J_1 \subset J_2$ und $f_2|_{J_1} = f_1$

Für $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ eine Kette ist $\tilde{J} = \bigcup_{(J,f) \in \mathcal{K}} J$ und $\tilde{f}: \tilde{J} \to M$ mit $\tilde{f}(j) = f(j)$ falls $(J, f) \in \mathcal{K}$ und $j \in J$ eine wohldefinierte Abbildung, da $\mathcal{K}$ eine Kette ist.

$(\tilde{J}, \tilde{f})$ ist also eine obere Schranke (genauer Grenze) von $\mathcal{K}$. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein Maximales Element $(J, f) \in \mathcal{M}$.

Angenommen $J \subsetneq I$, etwa $i \in I \setminus J$. Dann können wir mit einem $x_i \in M_i$ f auf $J \cup \{i\}$ durch

$$\tilde{f}(j) = \begin{cases} f(j) & j \in J \\ x_i & j = i \end{cases}$$ fortsetzen, ein Widerspruch zur Maximalität von (J, f). Also $J = I$ und f eine Auswahlfunktion □

10.8 Satz Jeder Körper K besitzt einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$.

Beweis (Artin)

1.) In einem ersten Schritt konstruieren wir einen algebraischen Oberkörper $K_1 \supset K$, in dem jedes nicht konstante Polynom $f \in K[x]$ eine Nullstelle hat.

Dazu betrachten wir die Indexmengen $I = \{f \in K[x] \mid f$ nicht konstant und normiert$\}$ und den Polynomring

$K[\{x_f \mid f \in I\}]$ in unendlich vielen Unbestimmten x_f.

In diesem Ring betrachten wir das Ideal $J = \langle \{f(x_f) \mid f \in I\} \rangle$

$J \subsetneq K[\{x_f \mid f \in I\}]$

Denn angenommen nicht, dann gibt es einen Ausdruck

$$1 = g_1 f_1(x_{f_1}) + \dots + g_n f_n(x_{f_n})$$

Sei $L \supset K$ ein Oberkörper, in dem $f_1, \dots, f_n$ je eine Nullstelle $a_1, \dots, a_n$ haben.

Der Substitutionshomomorphismus

$$K[\{x_f \mid f \in I\}] \to L$$
$$x_{f_i} \mapsto a_i$$
$$x_f \mapsto 0 \quad (\text{falls } f \notin \{f_1, \dots, f_n\}$$

bildet obige Gleichung auf die Gleichung

$$1 = 0 \in L$$ ab, ein Widerspruch.

Sei $\mathfrak{M}$ ein J umfassendes, maximales Ideal in $K[\{x_f \mid f \in I\}]$

Dieses existiert nach Satz 10.3 für dessen Beweis wir das Zornsche Lemma verwendet hatten. Dann ist $K_1 = K[\{x_f \mid f \in I\}]/\mathfrak{M} \hookleftarrow K$ ein Körper in dem jedes normierte nicht konstante Polynom f eine Nullstelle hat, nämlich das Bild $\overline{x_f}$ in x_f in K_1.

Die $\overline{x_f}$ sind algebraisch über K und da jedes Element von K_1 als ein Polynom in endlich vielen $\overline{x_{f_1}}, \dots, \overline{x_{f_n}}$ ist, ist $K_1 \supset K$ eine algebraische Körpererweiterung □

2.) Wir iterieren nun diese Konstruktion und erhalten eine Kette von Oberkörpern $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$

so dass jedes nicht konstante Polynom $f \in K_i[x]$ eine Nullstelle in K_{i+1} hat.

Dann sei $\overline{K} = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$

$\overline{K}$ ist ein Körper, $a,b \in \overline{K}$ $\exists i$ sodass $a,b \in K_i \Rightarrow a+b \in K_i \subset \overline{K}$

$\overline{K}$ ist algebraisch abgeschlossen. Ist $f \in \overline{K}[x]$ ein Polynom, dann hat f nur endlich viele Koeffizienten und diese liegen dann in einem K_i da wir eine Kette haben.

f hat eine Nullstelle in K_{i+1}, also in $\overline{K}$.

Schließlich $\overline{K} \supset K$ ist algebraisch, (die $\overline{x}_{F_1} \in K_1$ sind algebraisch) denn $K \subset K_1$, $K_1 \subset K_2$ usw sind algebraisch also jedes Element von K_i ist algebraisch über K und damit $\overline{K} = \bigcup K_i$ auch $\square$

10.9 Satz Sei K ein Körper, $\overline{K} \supset K$ ein algebraischer Abschluss und $L \supset K$ eine algebraische Körpererweiterung.

1) Dann lässt sich die Inklusion $K \subset \overline{K}$ zu einer Injektion $L \hookrightarrow \overline{K}$ von Körpern fortsetzen

2) $\overline{K}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

3) Jeder Automorphismus $\varphi \in Aut(L, K)$ lässt sich zu einem Automorphismus $\overline{\varphi} \in Aut(\overline{K}; K)$ fortsetzen, sodass $\overline{\varphi}|_L = \varphi$ wobei $L \subset \overline{K}$ vermöge der in 1) konstruierten Injektion auffassen.

Bew: 1) Wir betrachten die Menge

$$M = \{ (Z, \psi) \mid Z \text{ mit } K \subset Z \subset L \text{ ist ein Zwischenkörper und } \psi: Z \to \overline{K} \text{ eine Fortsetzung von } K \subset \overline{K}\}$$

M ist partiell geordnet

$$(Z_1, \psi_1) \leq (Z_2, \psi_2) \text{ falls } Z_1 \subset Z_2 \text{ und } \psi_2|_{Z_1} = \psi_1$$

Sei $\mathcal{K} \subset M$ eine Kette. Dann ist

$$\tilde{Z} = \bigcup_{(Z,\psi) \in \mathcal{K}} Z \text{ und } \tilde{\psi}: \tilde{Z} \to \overline{K} \text{ mit } \tilde{\psi}|_Z = \psi \text{ für } (Z, \psi) \in \mathcal{K} \text{ wohldefiniert}$$

$(\tilde{Z}, \tilde{\psi})$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{K}$

Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $(Z, \varphi) \in M$

Wir zeigen $Z = L$. Angenommen nicht und $a \in L \setminus Z$. Dann ist a über K also auch über Z algebraisch. Sei

$$f = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \in Z[x] \text{ das Minimalpolynom von } a.$$

Betrachten $\varphi(f) = x^n + \varphi(a_1) x^{n-1} + \ldots + \varphi(a_n) \in \overline{K}[x]$

und $\overline{a} \in \overline{K}$ eine Nullstelle von $\varphi(f)$

Wir haben ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(f) \arrow[r] \arrow[d] & (x-\bar{a}) \arrow[d] \\
Z[x] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x \mapsto a"] & \bar{K}[x] \arrow[d, "x \mapsto \bar{a}"] \\
Z[x]/(f) \cong Z[a] & \bar{K} \\
L \arrow[u, phantom, "\cap"] &
\end{tikzcd}$$

> ($*$) Ein System A von alg. unabhängigen Elementen nennt man eine Transzendenzbasis von L über K, falls $L \supset K(A)$ algebraisch ist.

$\varphi((f)) \subset (x-\bar{a})$, da $\varphi(f) \in (x-\bar{a})$. Dies definiert uns die Fortsetzung
$Z[a] \to \bar{K}$ mit $a \mapsto \bar{a}$

Dies Widerspricht der Maximalität von (Z, φ)

2) Sei $\bar{K_1}, \bar{K_2}$ zwei algebraische Abschlüsse. Dann lässt sich i_2 zu einem

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \bar{K_1} \\
 & \bar{K_2}
\end{tikzcd}$$

~~i_2 zu~~

Injektion $\varphi: \bar{K_1} \to \bar{K_2}$ fortsetzen nach 1)

Da $\bar{K_1}$ algebraisch abgeschl. ist zerfällt jedes Polynom $f \in K[x]$ über $\varphi(\bar{K_1})$ in Linearfaktoren. Da $\bar{K_2} \supset K$ alg. ist folgt.
$\varphi(\bar{K_1}) = \bar{K_2}$ d. h. φ ist ein Isomorphismus.

3) Wir fixieren die Inklusion $i: L \to \bar{K}$ und setzen $\varphi \circ i$ zu $\bar{\varphi}: \bar{K} \to \bar{K}$ fort.

$$\begin{tikzcd}
K \subset L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "i \circ \varphi"] & \bar{K} \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\
K \subset L \arrow[r, "i"'] & \bar{K}
\end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ ist injektiv und mit dem Argument aus Bew. 2) auch surjektiv also ein Automorphismus der K festläßt. $\bar{\varphi}|_L = \varphi$ ist klar $\square$

Bem: Der Satz sagt z. B., dass die absolute Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ eine sehr große Gruppe ist. Diese Gruppe komplett zu beschreiben ist weitgehend offen.
z. B. Taucht jede endliche Gruppe G als Galoisgruppe einer niemals endl. Körpererweiterung $L \supset \mathbb{Q}$ auf
das sogenannte Umkehrproblem der Galoistheorie ist offen.
Äquivalent dazu: Ist jede endliche Gruppe eine Quotientengruppe von $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ nach den Normalteiler $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}, L)$ falls $L \supset \mathbb{Q}$ G als Gruppe hat.
($\bar{\mathbb{Q}}$:= Menge d. algebr. Zahlen)

Frage: Welche Kardinalität hat $\bar{\mathbb{F}}_p$? $\bar{\mathbb{F}}_p$ ist abzählbar.

10.10 Definition Sei $L \supset K$ Körpererw., Ein System von $(a_1, \dots, a_n)$ von Elementen von L heißt algebraisch unabhängig wenn der Substitutionshomomorphismus
$K[x_1, \dots, x_n] \to L$ $x_i \mapsto a_i$ injektiv ist.
Ein System $A = (a_i)_{i \in I}$ von Elementen aus L heißt alg. unabh. wenn jedes endl. Teilsystem alg. unabh. ist, Äquivalent dass $K[\{x_i \mid i \in I\}] \to L$ $x_i \mapsto a_i$ inj. ist.
Ist dies der Fall, dann ist die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} \{a_i\}$ disjunkt und die Familie $I \to L$ lässt sich mit dem Bild identifizieren. A unabh $\to K(A) \cong Q(K[\{x_i \mid i \in I\}])$ ($*$)

10.11 Satz Sei $L \supset K$ eine Körpererweiterung. Ein System $A = (a_i)_{i \in I}$ von Elementen aus L ist genau dann eine Transzendenzbasis, wenn A ein maximales System von algebraisch unabhängigen Elementen ist.
Insbesondere besitzt jede Körpererweiterung eine Transzendenzbasis.

Beweis Sei A maximal. Dann folgt aus der Maximalität, dass jedes $b \in L$ algebraisch über $K(A)$ ist, da das System, das durch Hinzunahme von b zu A entsteht algebraisch abhängig sein muss.
Es gibt also $a_1, \dots, a_n \in A$ und ein Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ $\neq 0$ so dass $k[x_1, \dots, x_{n+1}] \to L$ $x_i \mapsto a_i$ $x_{n+1} \mapsto b$ auf Null abgebildet wird. $f \notin k[x_1, \dots, x_n]$, da A aus algebraisch unabhängigen Elementen besteht. Also b ist algebraisch über $K(a_1, \dots, a_n)$. Nach dem Zornschen Lemma existiert ~~so~~ ein maximales Element da in der Menge
$M = \{A \subset L \mid A \text{ alg. unabh.}\}$ geordnet durch Inklusion jede Kette $\mathfrak{K} \subset M$ durch $\tilde{A} = \bigcup_{A \in \mathfrak{K}} A$ beschränkt ist.

10.12 Lemma (Ergänzungslemma)
$L \supset K$ Körpererw., $A \subset L$ eine Menge alg. unabh. Elemente und $B \subset L$ ein System sodass L algebraisch über $K(B)$ ist. Dann lässt sich A durch Hinzunahme einer Teilmenge von B zu einer Transzendenzbasis ergänzen.

Bew: Betrachten wir Teilmengen $B' \subset B$ sodass A, B' disjunkt sind und $A \cup B'$ algebraisch unabhängig.
Die Menge $M = \{B' \subset B \mid A \cup B' \text{ alg. unabh. und } A \cap B' = \emptyset\}$
ist partiell geordnet und Ketten durch Vereinigung beschränkt.
Also gibt es ein maximales Element $B' \in M$ nach Zorn.
Dann ist jedes $b \in B$ algebraisch über $K(A \cup B')$
Also $K(A \cup B)$ alg. ~~ab~~ über $K(A \cup B')$
$L \supset K(B)$ alg. $\Rightarrow$ $L \supset K(A \cup B)$ alg. also $L \supset K(A \cup B')$ ist alg.
$A \cup B'$ ist Transzendenzbasis ∎

10.13 Satz + Def Je zwei Transzendenzbasen A und B von $L \supset K$ haben die gleiche Mächtigkeit.
Die Kardinalität einer Transzendenzbasis von $L \supset K$ nennt man den Transzendenzgrad $\operatorname{trdeg}_L K := \operatorname{card}(A) = |A|$

1. Teil des Beweises: Wir zeigen die Behauptung, wenn eine Transzendenzbasis etwa A endlich ist, $|A| < \infty$. Es reicht dann $|B| \le |A|$ zu zeigen, wegen der Symmetrie. ~~[illegible]~~ Induktion nach $n = |A|$.
$n = 0 \Rightarrow L \supset K$ algebraisch und daher jede Transzendenzbasis die leere Menge. Sei also $n \ge 1$. In diesem Fall ist $L \supset K$ nicht algebraisch und folglich $B \ne \emptyset$. Sei $y \in B$. Dann lässt sich nach dem Lemma y durch Hinzunahme von Elementen aus A zu einer Transzendenzbasis C ergänzen. Dann gilt notwendig $|C| \le n$, da $A \cup \{y\}$ algebraisch abhängig ist.
C und B haben also das Element y gemeinsam.
$C \setminus \{y\}$, $B \setminus \{y\}$ sind jeweils Transzendenzbasen von L über $K(y)$.
Da $|C \setminus \{y\}| \le n-1$ folgt mit Ind. Annahme, dass $|B \setminus \{y\}| \le n-1$ und daher $|B| \le n$. Damit ist gezeigt, entweder sind alle Transzendenzbasen endlich von der gleichen Kardinalität oder alle Transzendenzbasen sind unendlich.
Als Anwendung dieser Teilaussage zeigen wir den Satz von Abel.

10.14 Def Sei K ein Körper $n \ge 1$. Das allgemeine normierte Polynom von Grad n ist $f = x^n - c_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n \in K(c_1, \dots, c_n)[x]$ wobei $c_1, \dots, c_n$ alg. ~~[illegible]~~ unabh. über K sind.
In §9 hatten wir gezeigt, dass der Körper der Symmetrischen Funktionen $\subset K(t_1, \dots, t_n)$ wobei $t_1, \dots, t_n$ alg. unabh. über K sind von

$$s_1 = t_1 + \dots + t_n,$$
$$\vdots$$
$$s_n = t_1 \cdots t_n$$

erzeugt wird und das
$K(t_1, \dots, t_n) \supset K(s_1, \dots, s_n)$ algebraisch mit Galoisgruppe S_n ist.
Da $\operatorname{trdeg}_K K(t_1, \dots, t_n) = n$ muss auch $\operatorname{trdeg}_K K(s_1, \dots, s_n) = n$
Also $s_1, \dots, s_n$ sind alg. unabh. über K und damit

$$K(s_1, \dots, s_n) \cong K(c_1, \dots, c_n)$$

~~[illegible]~~ $\prod_{i=1}^{n} (x - t_i) \in K(s_1, \dots, s_n)[x]$ und dabei auf das allgemeine Polynom nten Grades abgebildet

Dies zeigt:

10.15 Satz (Abel) Das allgemeine Polynom n-ten Grades über K hat die Galoisgruppe S_n. Insbesondere ist für $n \geq 5$ das allgemeine Polynom n-ten Grades nicht durch Radikale lösbar ($char(K) = 0$) $\square$

Bevor wir den Beweis von 10.13 fortsetzen ein Einschub über Mengenlehre.

10.16 Def Zwei Mengen M und N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung von $M \to N$ gibt. Schreibweise: ~~card~~ $|M| = |N|$
N heißt wenigstens so mächtig wie M wenn es eine Injektion $N \hookrightarrow M$ gibt, äquivalent wenn es eine Surjektion $N \twoheadleftarrow M$ gibt. ($N \neq \emptyset$)
($\Rightarrow$ klar $\Leftarrow$ verwendet Auswahlpostulat) Schreibweise $|N| \leq |M|$

10.17 Satz M, N Mengen. $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M| \Rightarrow |M| = |N|$

Beweis: sei $\sigma : M \hookrightarrow N$ und $\tau : N \hookrightarrow M$ Injektionen. Wir müssen eine Bijektion $\rho : M \to N$ konstruieren.
Sei $M' \subset M$ die Menge aller $x \in M$, für die gilt

$$x \in (\tau \circ \sigma)^n (M) \Rightarrow x \in ((\tau \circ \sigma)^n \circ \tau)(N) \quad \forall n \geq 0.$$

Ein Element $x \in M$ gehört zu M' wenn die iterierte Urbildnehmen.

$$x, \tau^{-1}(x), \sigma^{-1}(\tau^{-1}(x)), \tau^{-1}(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(x)))$$

unendlich oft möglich ist, oder mit einem Element von N endet.
Wir setzen

$$\rho(x) = \begin{cases} \tau^{-1}(x) & \text{falls } x \in M' \\ \sigma(x) & \text{falls } x \notin M' \end{cases}$$

ρ ist injektiv, da $\rho|_{M'}$ und $\rho|_{M \setminus M'}$ injektiv sind und außerdem aus
$\rho(x) = \rho(y)$ für $x \in M'$ und $y \in M \setminus M'$
$\sigma(y) = \tau^{-1}(x)$ also $(\tau \circ \sigma)(y) = x \in M' \Rightarrow y \in M'$ $\lightning$ gilt.
ρ ist surjektiv. zu $z \in N$ betrachten wir $x = \tau(z)$. Für $x \in M'$ gilt dann $z = \rho(x)$
Für $x \notin M'$ besitzt z ein Urbild $y = \sigma^{-1}(z) = (\sigma^{-1}(\tau^{-1})(x))$
Mit $x \notin M'$ gilt dann auch $y \notin M'$ und daher $\rho(y) = \sigma(y) = z$ $\square$

10.18 Def Eine Menge M heißt abzählbar, wenn es eine Surjektion $\mathbb{N} \to M$ gibt. Mit dieser Notation sind endliche Mengen abzählbar.
Eine Menge abzählbar unendlich, wenn sie abzählbar und unendlich ist.

Beispiele 1) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist abzählbar
2) Abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen sind abzählbar.
Ist $M=\bigcup_{i\in I} M_i$, $\varphi: \mathbb{N}\to I$ eine Abzählung und $\varphi_i: \mathbb{N}\to M_i$ für jedes i eine Abzählung dann ist $\Phi: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to M$, $\Phi(i,j)=\varphi_{\varphi(i)}(j)$ surjektiv
3) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar
4) Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$
$$2^{(\mathbb{N})} = \{M\subset 2^{\mathbb{N}} \mid |M|<\infty\} = \bigcup_{n\geq 0} 2^{\{0,\dots,n\}}$$ ist als abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen abzählbar.
5) $2^{\mathbb{N}}$ ist nicht abzählbar. Allgemein M Menge dann $|M|<|2^M|$.

10.19 Satz Jede unendliche Menge ist die disjunkte Vereinigung von abzählbar unendlichen Mengen.

Beweis Betrachten $\mathcal{M}=\{\mathcal{A}\subset 2^M \mid \mathcal{A}$ besteht aus disjunkten abz. unendl. Teilmengen$\}$
$\mathcal{M}$ ist durch Inklusion partiell geordnet und durch Vereinigung kettenbeschränkt.
Sei $\mathcal{A}\in\mathcal{M}$ ein maximales Element. Dann ist das Komplement $M\setminus\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ endlich wegen Maximalität. Diese Mengen können wir zu einem der $A\in\mathcal{A}$ hinzunehmen um die gewünschte Zerlegung zu erhalten.

10.20 Corollar Sei M eine unendliche Menge. Dann sind $\mathbb{N}\times M$ und M gleichmächtig.

Beweis: Sei $M=\dot\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ ~~die~~ disjunkte Vereinigung von abzählbar unendlichen Teilmengen. Dann gilt:
$$\mathbb{N}\times M = \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(\mathbb{N}\times A) \xrightarrow{\sim} \bigcup_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \dot\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = M$$
□

2-ter Teil des Beweises von 10.13.
Es seien A, B Transzendenzbasen von $L\supseteq K$, beide unendlich. Sei $A=\dot\bigcup_{i\in I} A_i$ mit A_i abzählbar unendliche Teilmengen.
Für jedes i und jedes $a\in A_i$ ist $B\cup\{a\}$ algebraisch abhängig. Es gibt aber eine Teilmenge $B_a\subset B$ so dass a algebraisch über $K(B_a)$ ist.
Sei $\varphi_a: \mathbb{N}\to B_a$ eine Abzählung.
Dann definieren wir $\Phi: \mathbb{N}\times A\to B$ $(i,a)\mapsto \varphi_i(a)$
Das Bild dieser Abbildung ist
$$\bigcup B_a$$

Da jedes a algebraisch über $K(B_a)$ ist folgt a ist algebraisch über $K(\bigcup B_a)$ $\forall a \in A$ und da L algebraisch über $K(A)$ ist folgt L ist algebraisch über $K(\bigcup B_a)$

Es folgt $B = \bigcup_{a \in A} B_a$ Also $|A| = |\mathbb{N} \times A| \geq |B|$

$|B| \geq |A|$ zeigt genauso also $|A| = |B|$ nach 10.17 $\square$

10.21 Corollar $M \supset L \supset K$ Körpererweiterung. Dann gilt:

$$\operatorname{trdeg}_K M = \operatorname{trdeg}_L M + \operatorname{trdeg}_K L$$

Bew: Kardinalzahlen addiert man vermöge

$$\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) := \operatorname{card}(A \dot\cup B)$$

Sei A Transzendenzbasis von $L \supset K$, B von $M \supset K$

Dann sind $A \cup B$ alg. unabh. über K und da $L \supset K(A)$ und $M \supset K(B)$ algebraisch sind ist auch $M \supset K(A \cup B)$ algebraisch. Also $A \cup B$ ist eine Transzendenzbasis $\square$