§3 Auflösbare Gruppen

<u>3.1 Definition</u>: G eine Gruppe. Die Kommutator UG.

$$K(G) = [G, G]$$

ist die von allen Kommutatoren

$$[ab] = a b a^{-1} b^{-1}$$ erzeugte Untergruppe.

Also $K(G)$ besteht aus endlichen Produkten

$$[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$$

von Kommutatoren.

<u>Bem</u>: 1) G Gruppe. G ist abelsch $\Leftrightarrow [G,G] = \{e\}$

2) $K(G) = [G,G] \subset G$ ist ein Normalteiler.

In der Tat $g[a,b]g^{-1} = g a b a^{-1} b^{-1} g^{-1}$

$$= g a g^{-1} g b g^{-1} g a^{-1} g^{-1} g b^{-1} g^{-1}$$

$$= [gag^{-1}, gbg^{-1}]$$

<u>3.2 Satz</u> G Gruppe $N \subset G$ Normalteiler

Dann gilt: G/N ist abelsch $\Leftrightarrow K(G) \subset N$

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$" Sei $\rho: G \to G/N$ die Quot abb und G/N abelsch.

Dann gilt $\rho([a,b]) = \rho(a)\rho(b) \cdot (\rho(a))^{-1}(\rho(b))^{-1} = e \in G/N$

also $[a,b] \in \ker(G \xrightarrow{\rho} G/N) = N$

$\Rightarrow [G,G] \subset N$

„$\Leftarrow$" Wegen $K(G) \subset N$ gilt $\forall a,b \in G$,

$$aN \cdot bN = abN = ab[b^{-1}, a^{-1}] \cdot N \quad \text{da } [b^{-1}, a^{-1}] \in N$$

$$= abb^{-1}a^{-1}ba N = baN = bNaN$$

Also ist G abelsch □

<u>Beispiel</u> $K(S_n) = A_n$. In der Tat, da $[S_n : A_n] = 2$, ist A_n Normalteiler und S_n/A_n zyklisch von Ordnung 2. Also $K(S_n) \subset A_n$

Andererseits gilt $[(12),(23)] = \underbrace{(12)(23)}_{(123)(123)}(12)(23) = (132)$

Einer der 3-Zykel ist ein Kommutator.

$\Rightarrow$ Alle 3-Zykel sind Kommutatoren, da sie zueinander konjugiert sind.

Wegen $(123)(345)=(12345)$ ist jeder 5-Zykel in $K(G)$ und allgemeiner jeder ungerade Zykel in $K(G)$.

$$(12)(34)=(123)(234)\overset{!}{=}(12)(34)$$

und $(12)(234)=(1234)$

$$(1234)(456)=(123456)$$

zeigt, dass jedes Produkt zweier disjunkter gerader Zykel in $K(G)$ liegt $\square$

<u>3.3 Definition</u>: G eine Gruppe, $e \in G$ das neutrale Element.
Eine Normalreihe in G ist eine Folge

$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$ von Untergruppen, sodass $G_{i+1} \subset G_i$ jeweils ein Normalteiler ist.

Die Quotienten G_i/G_{i+1} heißen Faktoren der Normalreihe.
Man stellt sich hierbei G aus den kleineren Gruppen G_i/G_{i+1} zusammengesetzt vor.

2) Eine Gruppe G heißt einfach, wenn G keinen nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

3) Eine Gruppe heißt <u>auflösbar</u>, wenn G eine Normalreihe $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$ mit ~~zyklischen~~ abelschen Faktoren G_i/G_{i+1} besitzt.

4) Definiere $K^n(G)$ induktiv durch $K^n(G) = K(K^{n-1}(G))$,
$K^0(G) = G$, $K^1(G) = K(G)$

<u>Bem</u>: G einfach, $K(G) = G$ oder G ist abelsch.

<u>3.4 Satz</u>: Sei G eine Gruppe. Äquivalent sind

1) G ist auflösbar
2) $\exists\, n$ sodass $K^n(G) = \{e\}$

<u>Beweis</u>: 2) $\Rightarrow$ 1) $G = K^0(G) \supset K^1(G) \supset \dots \supset K^n(G) = \{e\}$ ist eine Normalreihe mit abelschen Faktoren, da $K(K^i(G)) = K^{i+1}(G)$

1) $\Rightarrow$ 2) Sei $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. Dann gilt: $K(G_i) \subset G_{i+1}$, da G_i/G_{i+1}

abelsch ist.

Wir zeigen induktiv $K^i(G) \subset G_i$.

IA: $K^0(G) = G \subset G$ ist trivial.

~~Wen~~ G_i/G_{i+1} abelsch $\Rightarrow K(G_i) \subset G_{i+1}$

IV: $K^{i-1}(G) \subset G_i$ folgt:

$$K^{i+1}(G) = K(K^i(G)) \subset K(G_i) \subset G_{i+1}.$$

Also $K^n(G) \subset G_n = \{e\} \Rightarrow K^n(G) = \{e\}$ $\square$

<u>3.5 Satz</u>: Jede endliche auflösbare Gruppe G besitzt eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

<u>Beweis</u>: Sei $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. Wir zeigen, dass wir diese Normalreihe zu einer mit zyklischen Faktoren mit Primzahlordnung ver~~feinern~~ können.

Ist G_i/G_{i+1} noch nicht von Primzahlordnung, dann existiert ein $A \in G_i/G_{i+1}$ von Primzahlordnung. Also $\langle A \rangle \subsetneq G_i/G_{i+1}$.

Sei $\varphi: G_i \to G_i/G_{i+1}$ und $N = \varphi^{-1}(\langle A \rangle)$. Dann gilt

$$G_i \supset N \supset G_{i+1}$$

Ferner $\langle A \rangle$ ist ein Normalteiler, da G_i/G_{i+1} abelsch ist und $\varphi: G_i \to G_i/G_{i+1}$ ~~surj~~ ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\varphi(gNg^{-1}) = \varphi(g) \cdot A\, (\varphi(g))^{-1} = A, \text{ also}$$

$$gNg^{-1} \subset N \Rightarrow gNg^{-1} = N$$

$$G_i/N \cong \frac{G_i/G_{i+1}}{N/G_{i+1}} \text{ nach dem Isomorphiesatz}$$

$$\cong G_i/G_{i+1} / \langle A \rangle \text{ ist eine Gruppe kleinerer Ordnung,}$$

abelsch, da Quotient eine abelsche Grund

$$N/G_{i+1} = \langle A \rangle \text{ ist zyklisch.}$$

Also $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset N \supset G_{i+1} \supset \dots \supset G_n = \{e\}$ ist eine Normalreihe mit $n+1$ Faktoren und iterativ können durch einschieben von Normalteiler, erreichen, dass sämtliche Faktoren von Primzahl Ordnung sind. $\square$

3.6 Satz:

1) Jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar.

2) G Gruppe, $N \subset G$ Normalteiler. Dann gilt

G auflösbar $\Leftrightarrow$ N und G/N auflösbar sind.

Bew: 1) $H \subset G$ Untergruppe $\Rightarrow K(H) \subset K(G)$

und allgemeiner $K^n(H) \subset K^n(G)$.

Ist also $K^n(G) = \{e\} \Rightarrow K^n(H) = \{e\} \Rightarrow H$ ist auflösbar

2) Sei $\rho : G \to G/N$ die Quotientenabb. Dann gilt:

$$K^n(G/N) = K^n(\rho(G)) = \rho(K^n(G))$$

Mit $K^n(G) = \{e\}$ folgt also $K^n(G/N) = \{N\} \in G/N$

d.h. mit G ist auch G/N auflösbar, sowie N auflösbar nach 1)

„$\Leftarrow$": G/N und N auflösbar $\Rightarrow \exists n \; K^n(G/N) = \{N\} \in G/N$

und $\exists m \; K^m(N) = \{e\}$

$\Rightarrow \rho(K^n(G)) = \{N\}$ also $K^n(G) \subset N = \ker \rho$

Ferner folgt induktiv $K^{n+i}(G) \subset K^i(N)$ und daher

$K^{n+m}(G) \in K^m(N) = \{e\}$ d.h. G ist auflösbar.

Bem Thm (Feit-Thompson, 1963)

Jede endliche Gruppe ungerader Ordnung ist auflösbar.

Beweis umfasst 254 Seiten

Dieser Satz ist Ausgangspunkt für eine vollständige Klassifikation der ~~umfassten~~ einfachen Gruppen, Thriumph d. Mathematik 20. Jahrh.

- Zyklische Gruppen von Primzahlordnung
- A_n alternierende Gruppe für $n \geq 5$
- Gruppen vom Lietyp Bsp $PSL(n, \mathbb{F}_q)$ $\mathbb{F}_q$ endl. Körper mit q Elementen

  $= GL(n, \mathbb{F}_q)/(\mathbb{F}_q^*)$
- 26 sporadische Gruppen

3.7 Satz Jede endliche p-Gruppe ist auflösbar.

Beweis: G endl. p Gruppe $\Leftrightarrow |G| = p^k$

Wir zeigen, dass Zentrum $Z(G) = \{a \mid ga = ag \ \forall g \in G\}$ nicht trivial ist. Da $Z(G) \subset G$ ein Normalteiler ist und $G/Z(G)$ eine p-Gruppe kleinerer Ordnung ist, ergibt sich der Satz induktiv.

Betrachte die Operation G auf G durch Konjugation

$$(g, a) \mapsto gag^{-1}$$

und ein vollständiges Repräsentantensystem $a_1, \dots, a_n$ der Bahnen, d.h. Konjugationsklassen.

Dann ist $Z(G) \subset \{a_1, \dots, a_n\}$, für $a_j \in \{a_1, \dots, a_n\} \setminus Z(G)$ hat die Bahn $C_{a_j} = \{ga_jg^{-1} \mid g \in G\}$ mehr als ein Argument und wegen $|C_{a_j}| = [G : \underset{\neq G}{\mathrm{Stab}(a_j)}]$ hat die Bahn p-Potenzordnung.

$$\underbrace{|G|}_{\substack{\text{durch}\\ \text{p-teilbar}}} = |Z(G)| + \sum_{a_j \in \{a_1, \dots, a_n\} \setminus Z(G)} |C_{a_j}| \Rightarrow p \mid |Z(G)|$$

Da $e \in Z(G) \Rightarrow Z(G) \supsetneq \{e\}$ und ist somit ein nichttrivialer Normalteiler. $\square$