Spezielle Funktionen

Wir betrachten zunächst die Hyperbelfunktionen, die mit Hilfe der Exponentialfunktion definiert werden.
Wir beginnen mit

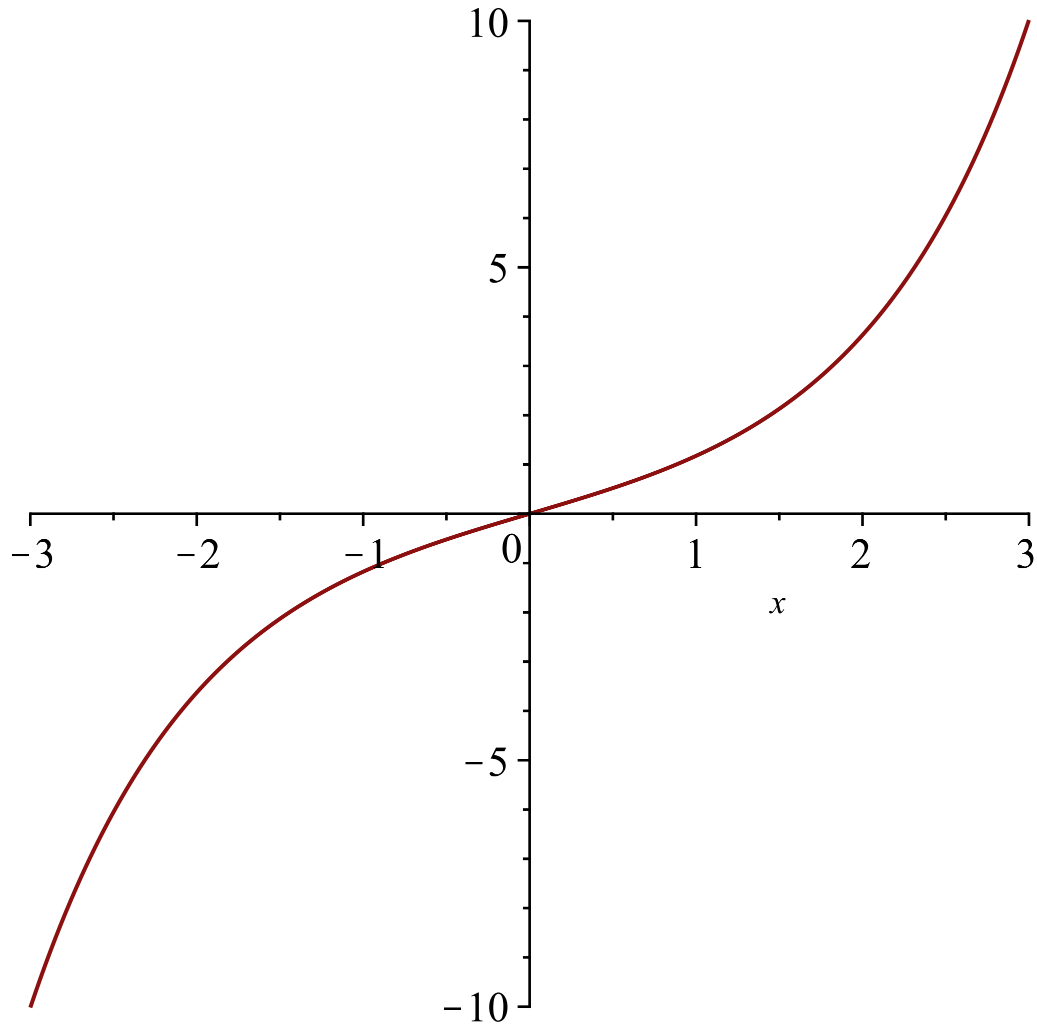
$\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{(-x)}}{2}$ und $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{(-x)}}{2}$. Wegen $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$

für alle x beschreiben die Punkte der Ebene mit den Koordinaten
$(\cosh(x), \sinh(x))$ eine Hyperbel, die Funktionen heißen deshalb auch Hyperbelfunktionen.
Die Definition ebenso wie die Benennung erinnert an die Formeln für Sinus und Cosinus,
die aus der Formel von Euler-de'Moivre folgen:

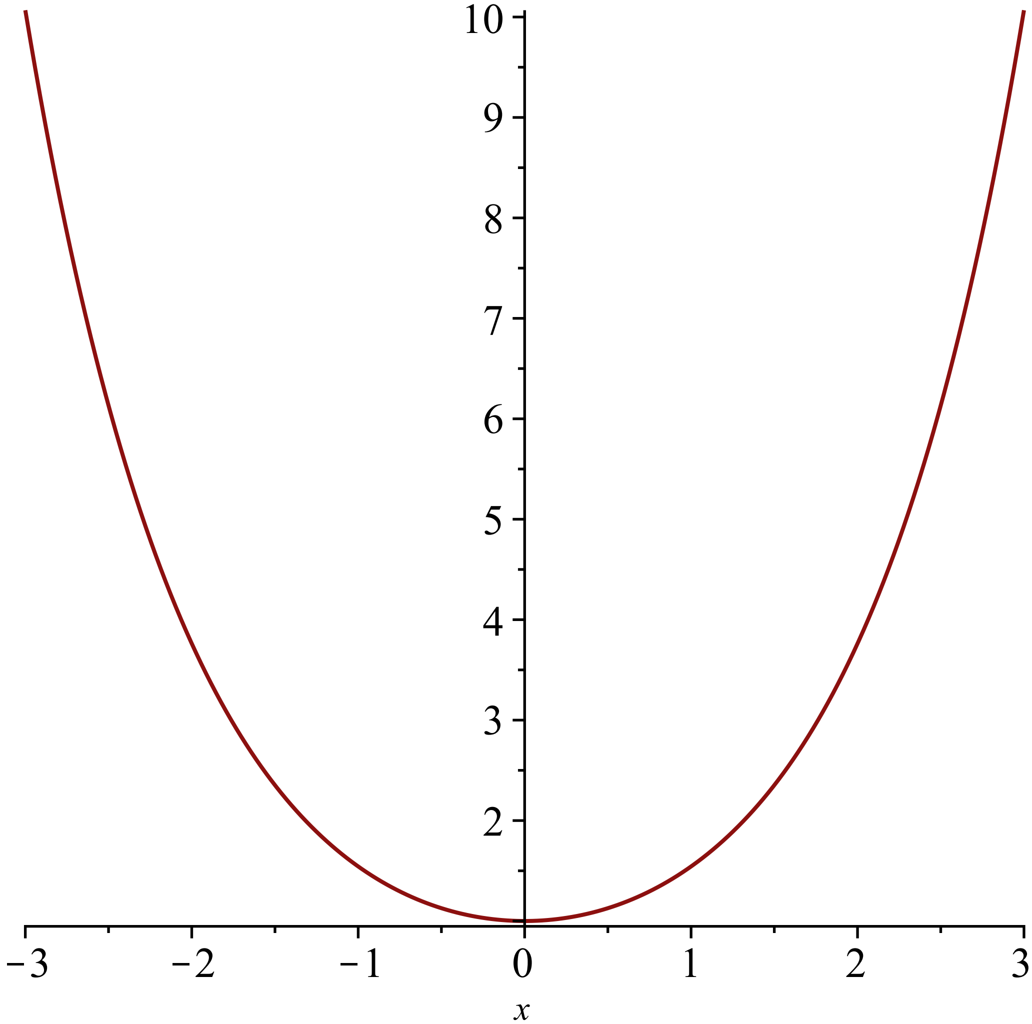
$\cos(x) = \dfrac{e^{(i\,x)} + e^{(-i\,x)}}{2}$, $\sin(x) = \dfrac{e^{(i\,x)} - e^{(-i\,x)}}{2\,i}$.

Wir zeigen die Graphen:

```
> plot(sinh(x),x=-3..3);
```

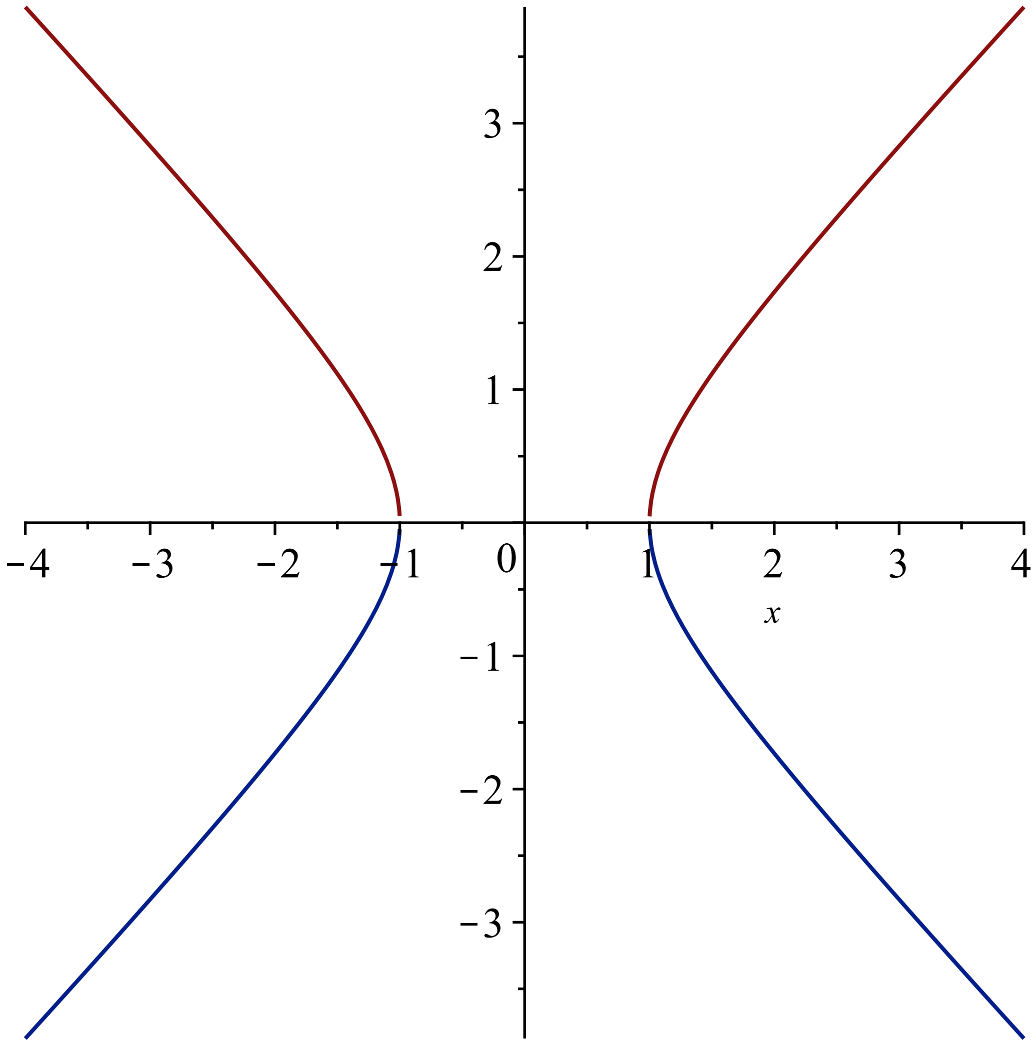



```
> plot(cosh(x),x=-3..3);
```



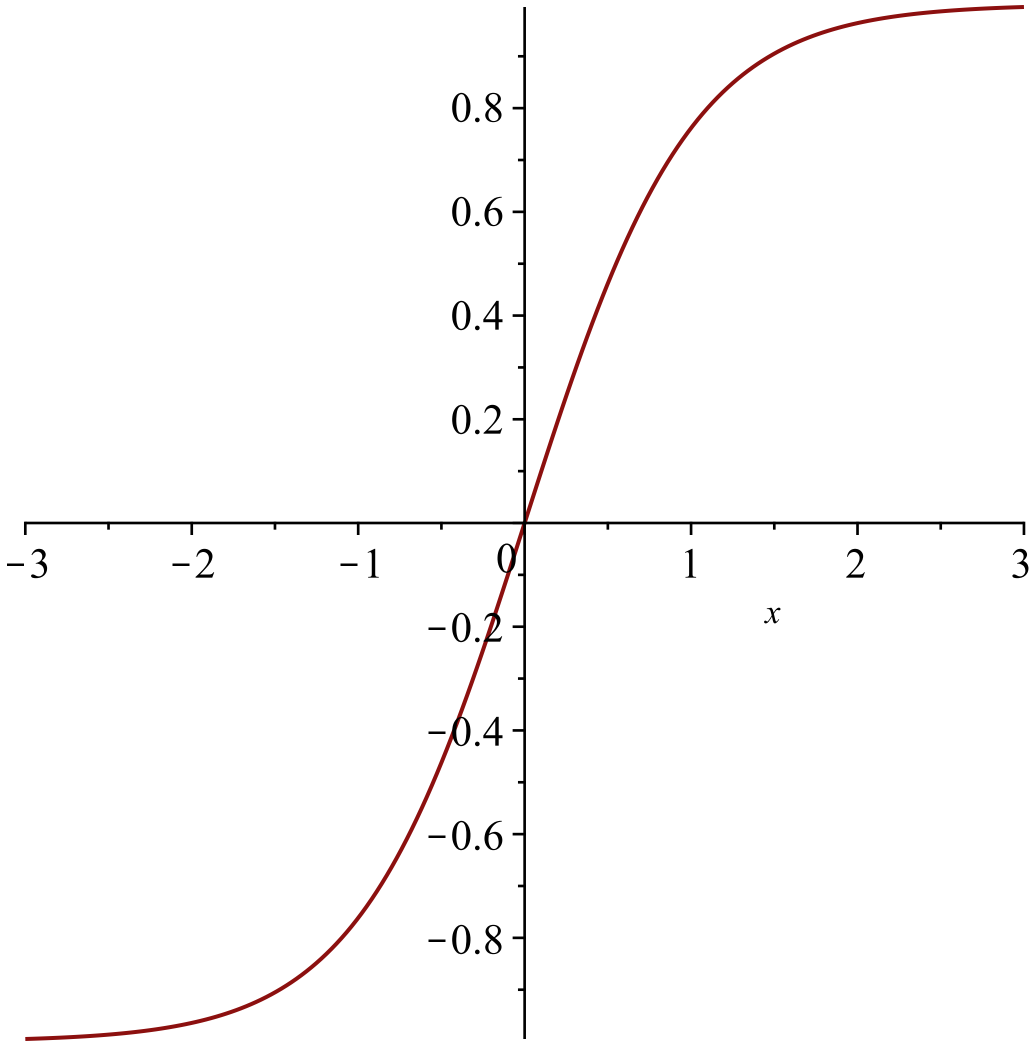
Der Graph des Cosinus hyperbolicus heißt auch die Kettenlinie,
weil eine durchhängende Kette (oder ein Seil) diese Form annimmt.
Um die Benennung plausibel zu machen wird hier noch einmal die
Hyperbel (mit zwei Ästen) gezeigt, die aus allen Punkten (x,y) der Ebene mit $x^2 - y^2 = 1$ besteht:

```
> plot({sqrt(x^2-1),-sqrt(x^2-1)},x=-4..4);
```



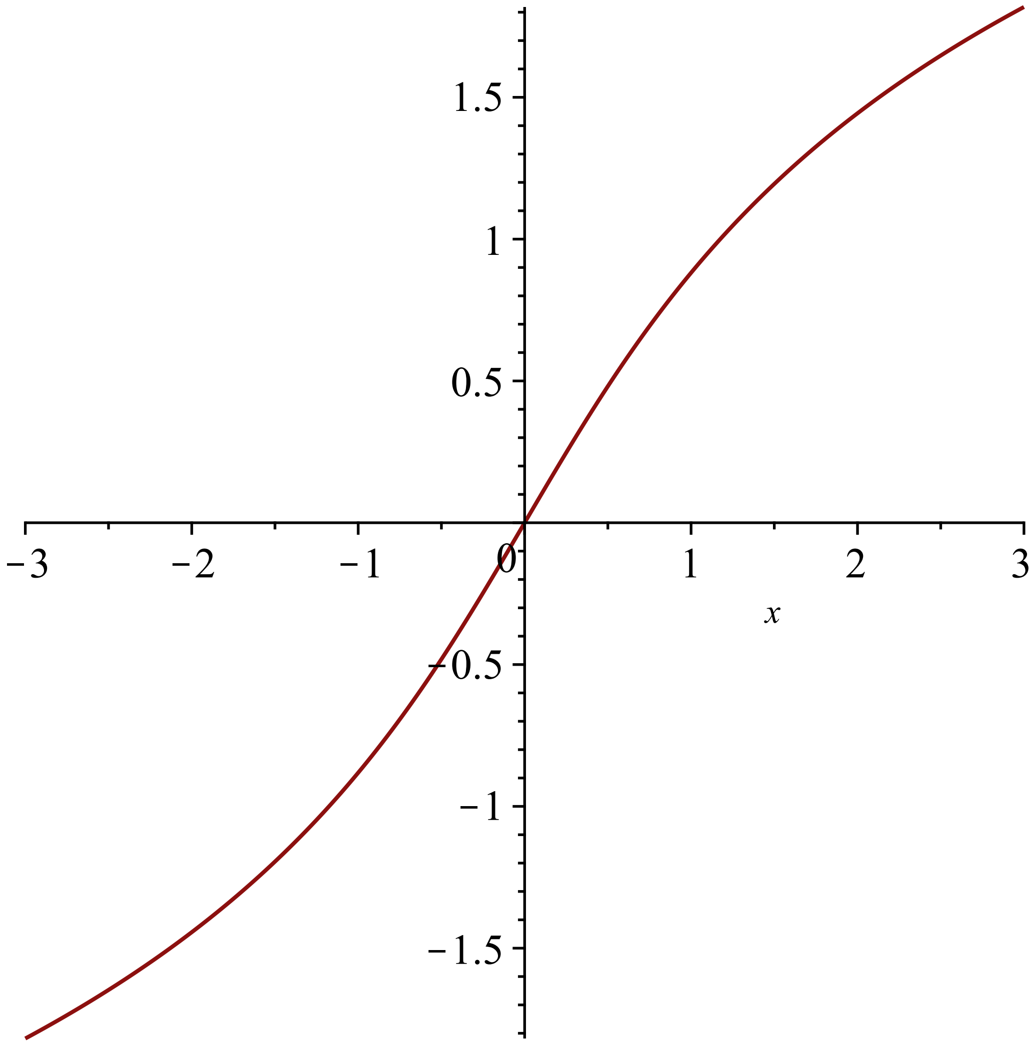
Der Tangens hyperbolicus ist in Analogie zu den trigonometrischen Funktionen durch $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ definiert, hier ist sein Graph:

```
> plot(tanh(x),x=-3..3);
```

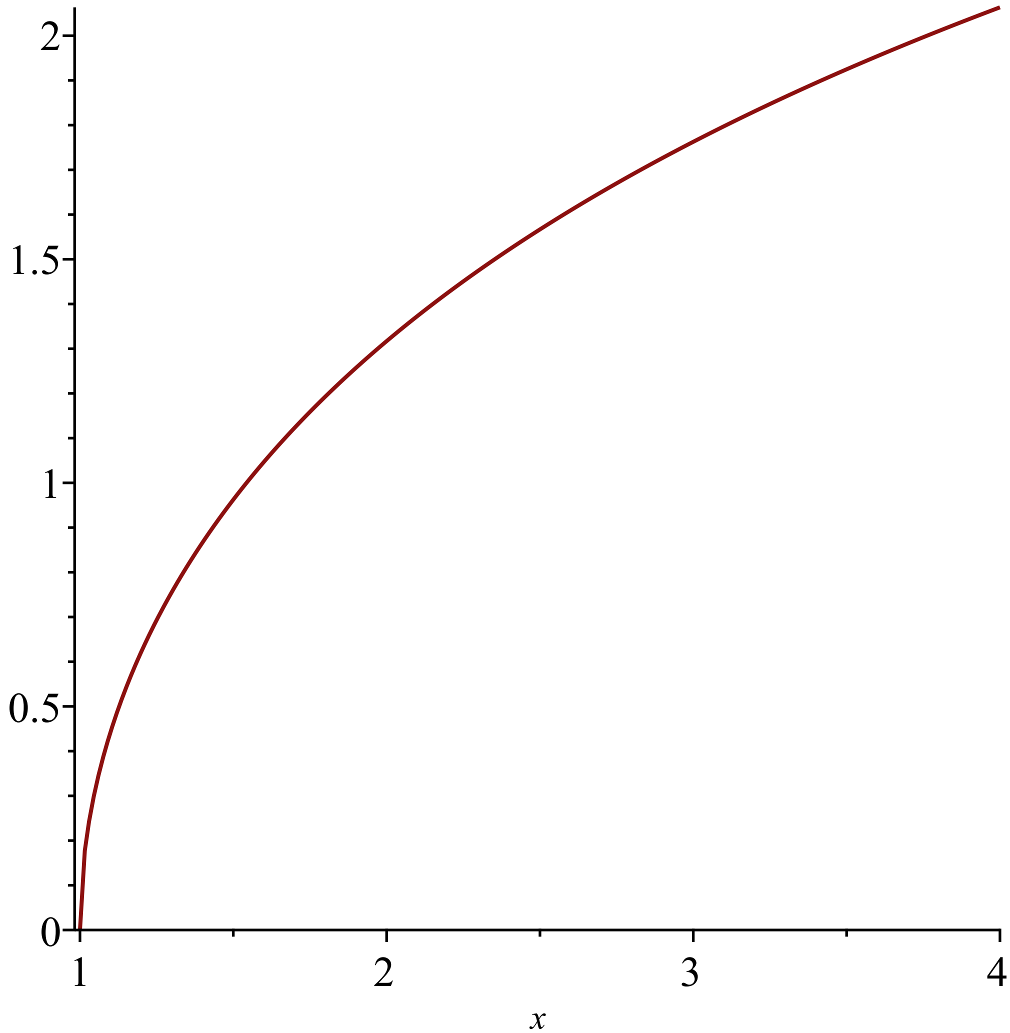


Wir zeigen jetzt die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen.

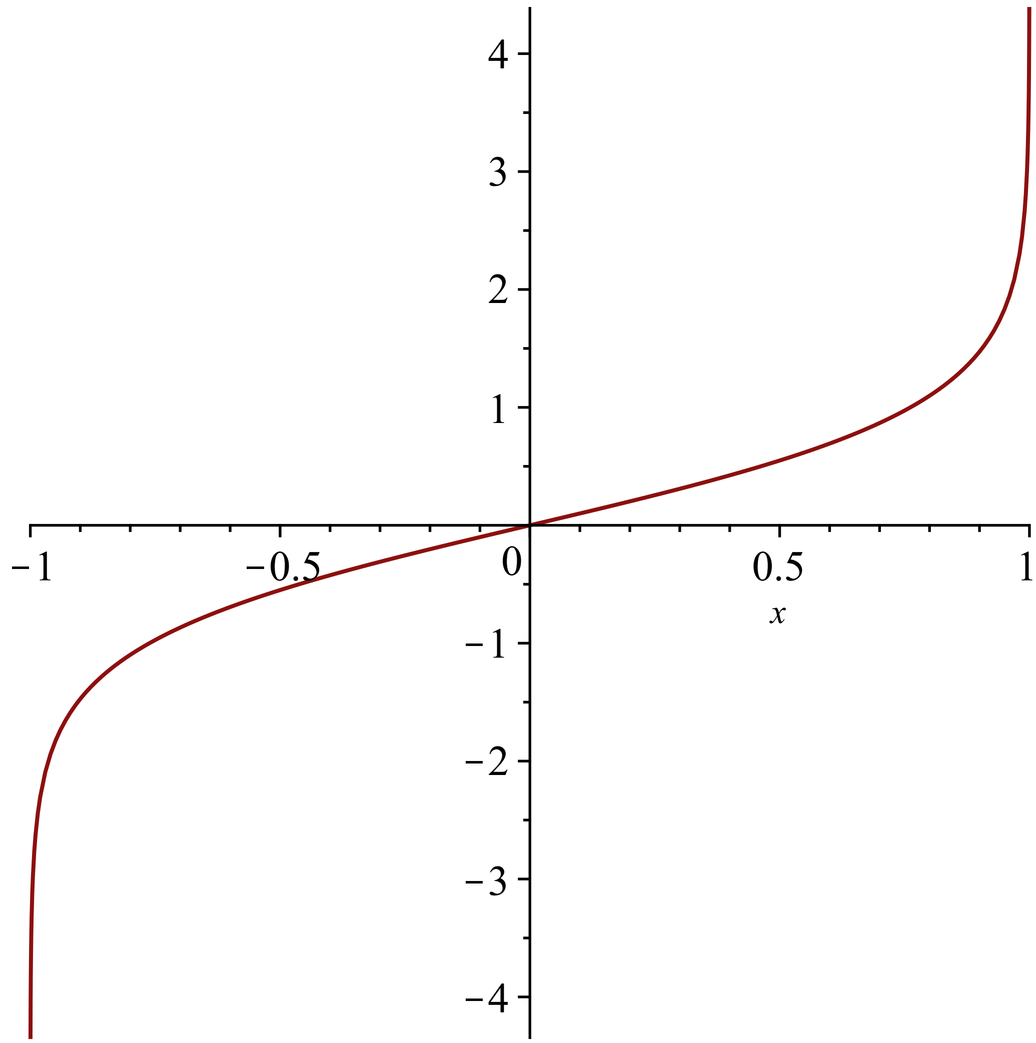
```
> plot(arcsinh(x),x=-3..3);
```




```
> plot(arccosh(x),x=1..4);
```




```
> plot(arctanh(x),x=-1..1);
```



Schließlich betrachten wir noch die Ableitungen der Umkehrungen der Hyperbelfunktionen.
Man sieht, dass die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen als Stammfunktionen
zu einfachen algebraischen bzw. ganzrationalen Funktionen auftreten.

```
> diff(arcsinh(x),x);
```

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{1}$$

```
> diff(arccosh(x),x);
```

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} \tag{2}$$

```
> diff(arctanh(x),x);
```

$$\frac{1}{-x^2+1} \tag{3}$$

Zum Vergleich noch die ganz ähnlich gebauten Ableitungen der Umkehrfunktionen der
trigonometrischen Funktionen:

```
> diff(arcsin(x),x);
```

(4)

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}} \tag{4}$$

```
> diff(arccos(x),x);
```

$$-\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}} \tag{5}$$

```
> diff(arctan(x),x);
```

$$\frac{1}{x^2+1} \tag{6}$$

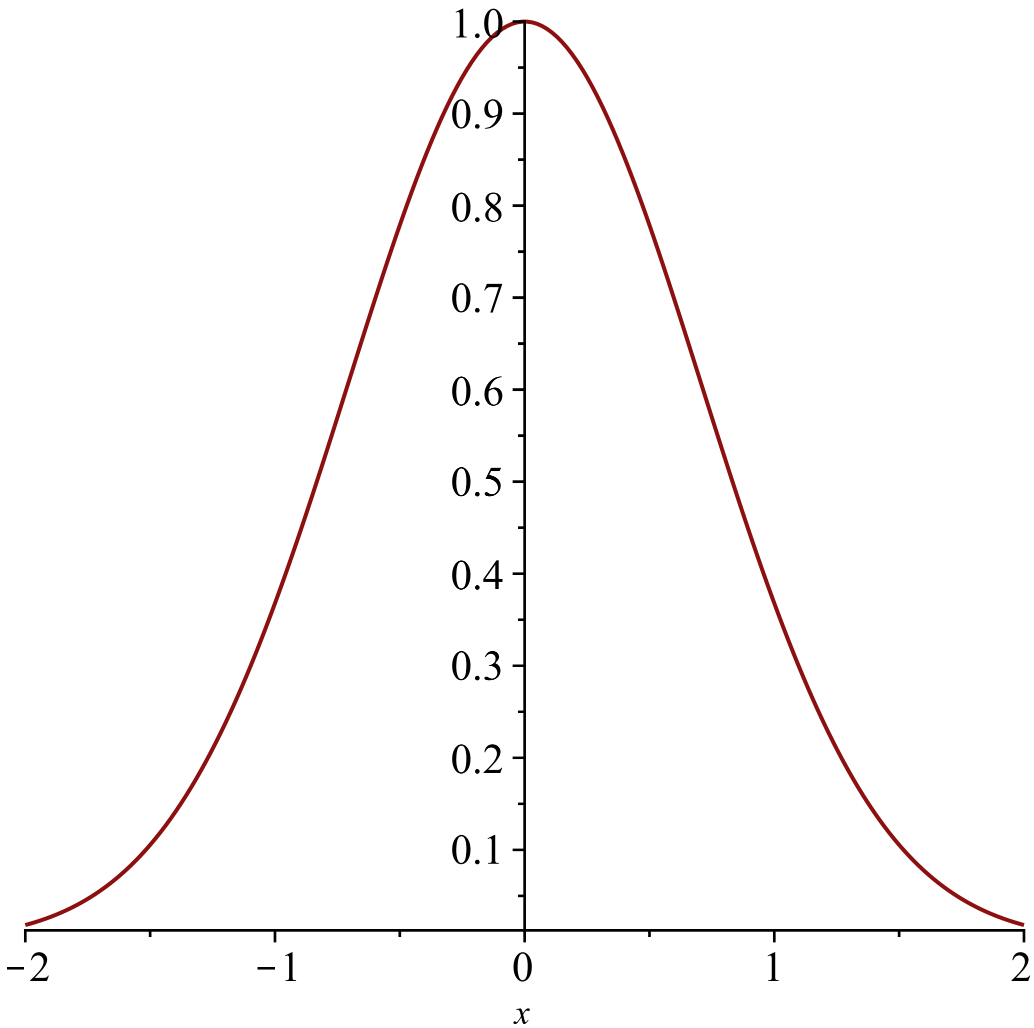
Wir betrachten jetzt einige spezielle Funktionen, die mit Hilfe von Integralen definiert werden. Ausgehend von der Exponentialfunktion betrachten wir die Funktion

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{(-t^2)}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\pi}},$$

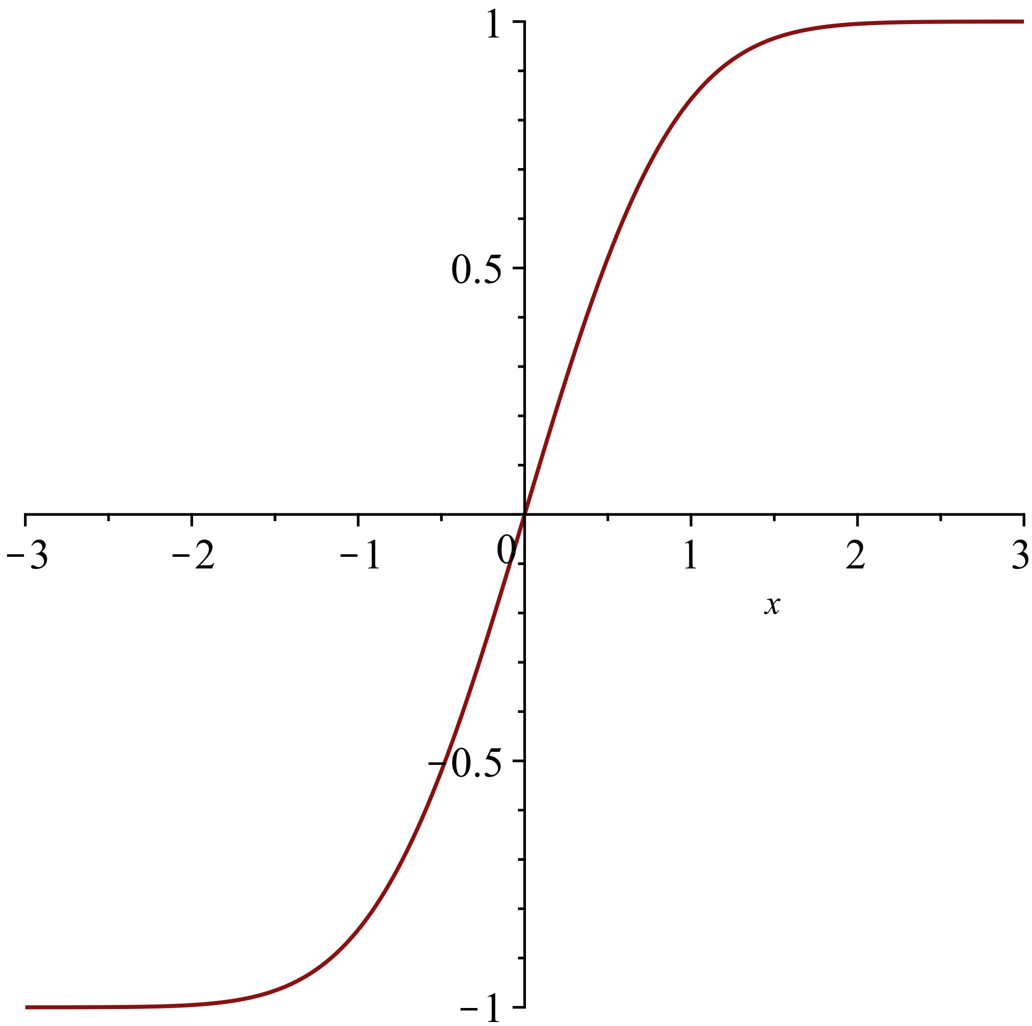
die Fehlerfunktion (oder das Fehlerintegral).

Diese Funktion lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken, sie spielt in der Statistik eine wichtige Rolle.
Der Grenzwert von $\mathrm{erf}(x)$ für x-> ∞ ist 1 (das werden wir später mit Hilfe eines Doppelintegrals zeigen). Da $\mathrm{e}^{(-x^2)}$ eine gerade Funktion ist, ist $\mathrm{erf}(x)$ eine ungerade Funktion, der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

```
> plot(exp(-x^2),x=-2..2);
```




```
> plot(erf(x),x=-3..3);
```



Weitere häufig vorkommende Funktionen sind die Exponentialintegralfunktion $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, \mathrm{d}t$,

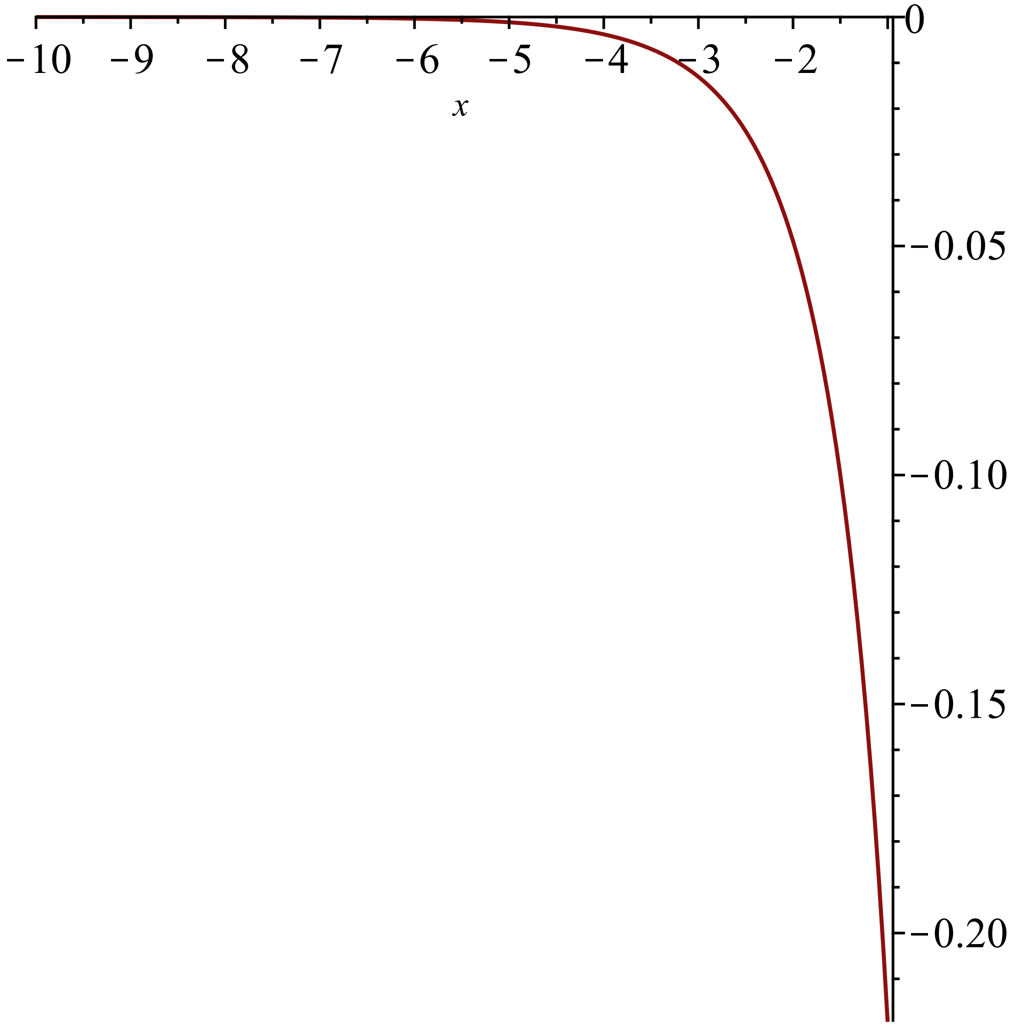
der Integralcosinus $Ci(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ und der Integrallogarithmus $\mathrm{Li}(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\, \mathrm{d}t$.

Man beachte, dass bei diesen Funktionen an der Singularität $t = 0$ bzw. $t = 1$ bei der Auswertung des uneigentlichen Integrals der Cauchy'sche Hauptwert betrachtet werden muss, das heißt, dass man etwa bei dem Integral für $\mathrm{Li}(x)$ für $1 < x$ den Limes für y->0, y>0 von

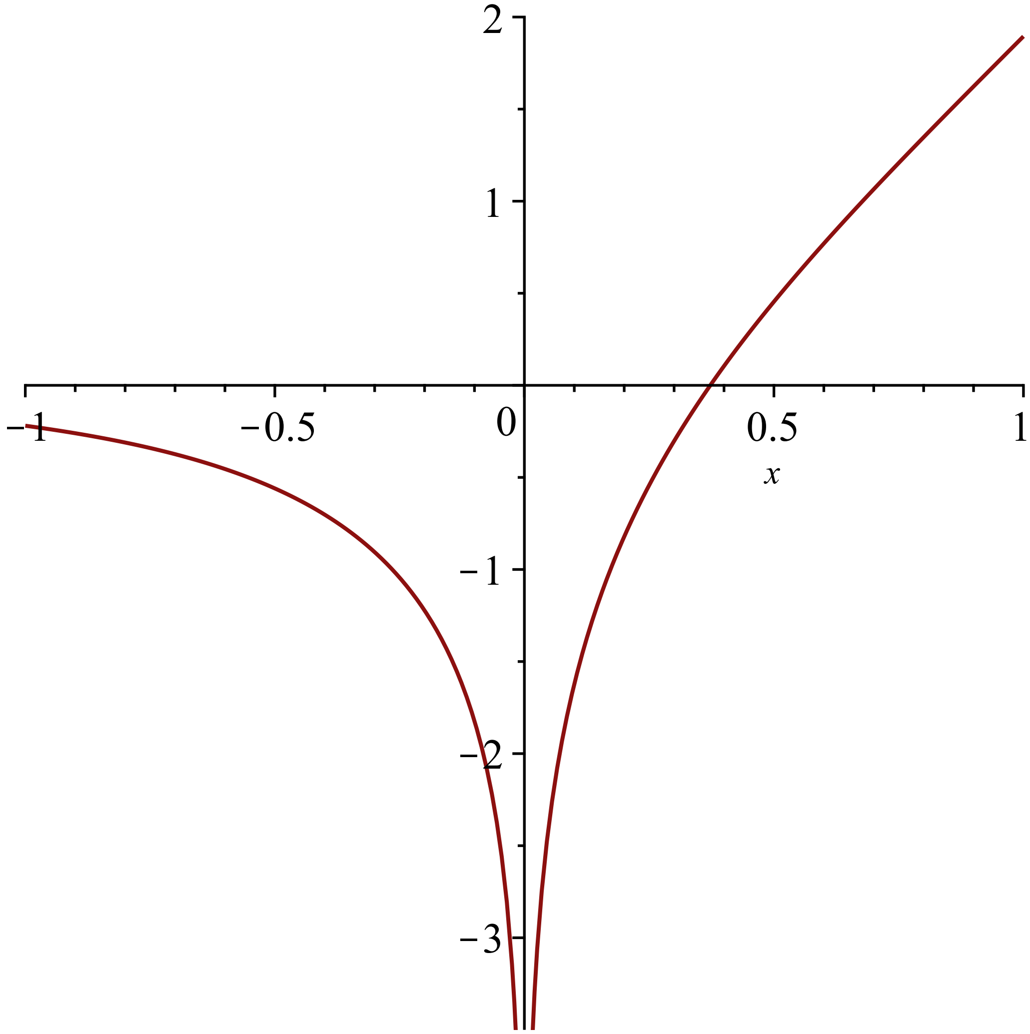
$\int_{0}^{1-y} \frac{1}{\ln(t)}\, \mathrm{d}t + \int_{1+y}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\, \mathrm{d}t$ berechnet (streben hier die obere Grenze des ersten und die untere Grenze des zweiten Integrals unabhängig voneinander gegen 1, so erhält man keinen wohldefinierten Wert für das uneigentliche Integral).

Wir zeichnen hier ihre Graphen:

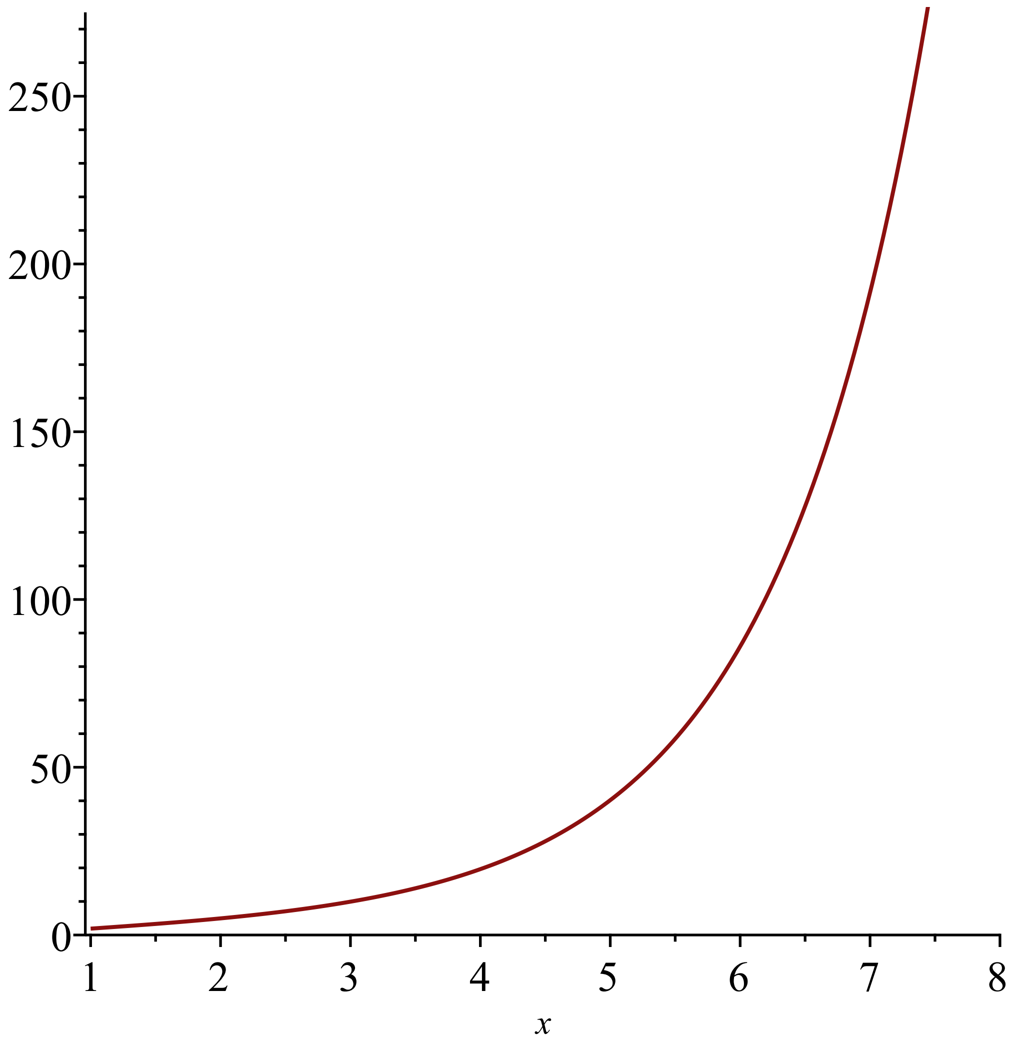
```
> plot(Ei(x),x=-10..-1);
```



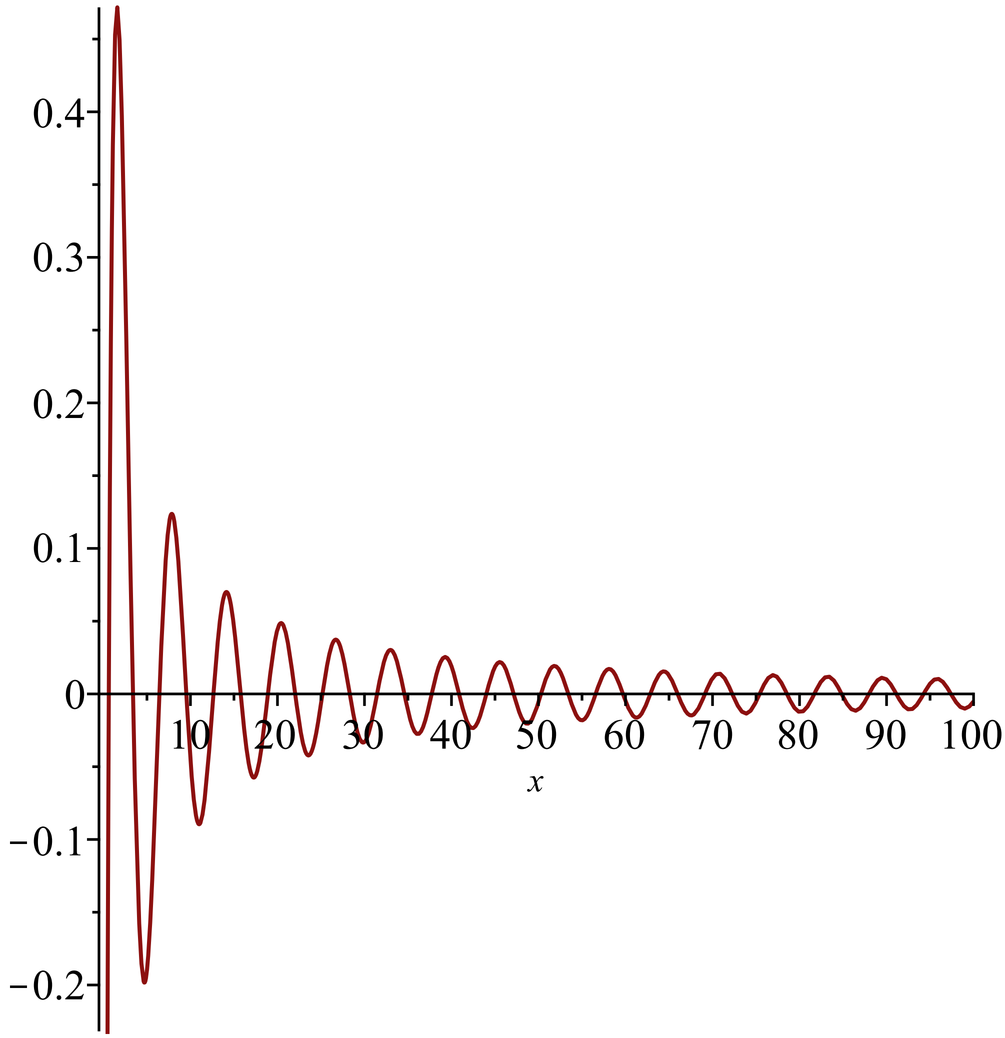

```
> plot(Ei(x),x=-1..1);
```



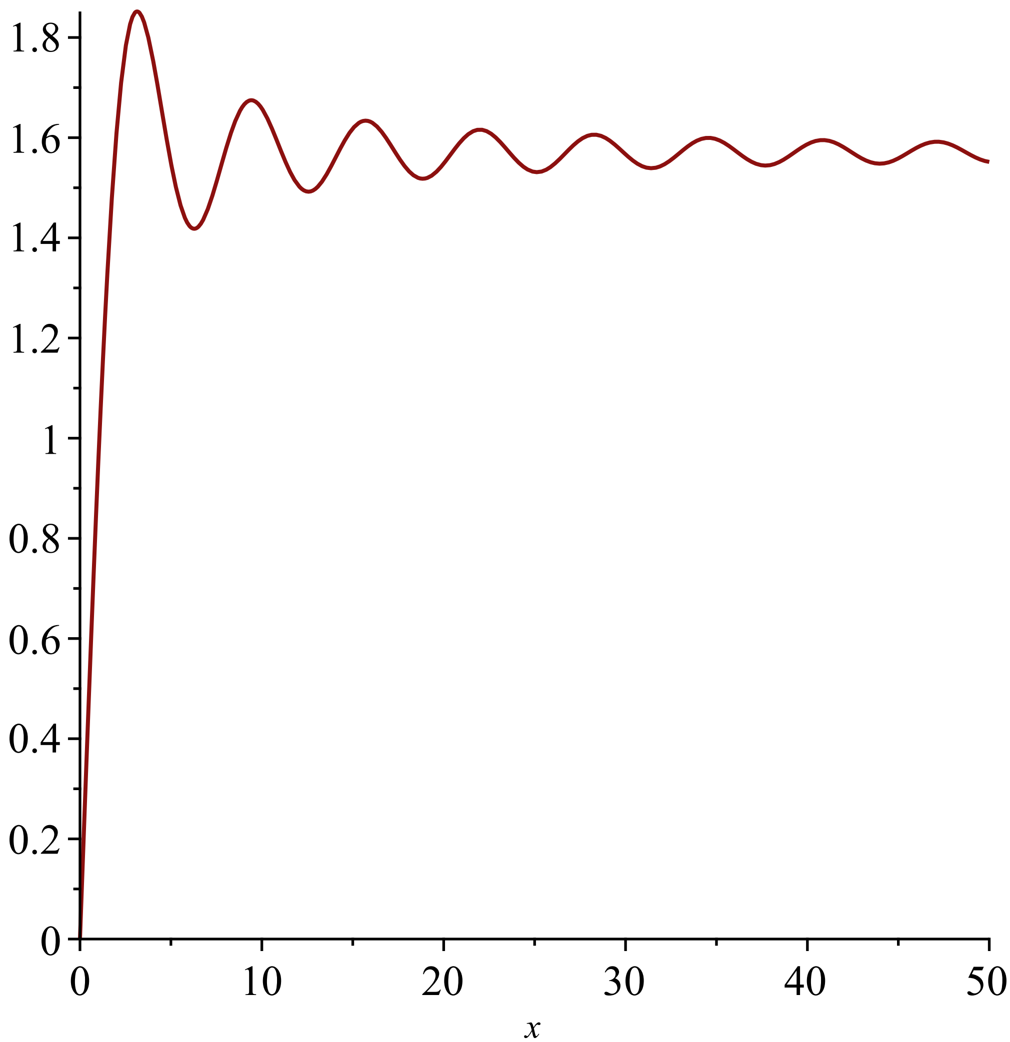

```
> plot(Ei(x),x=1..10);
```



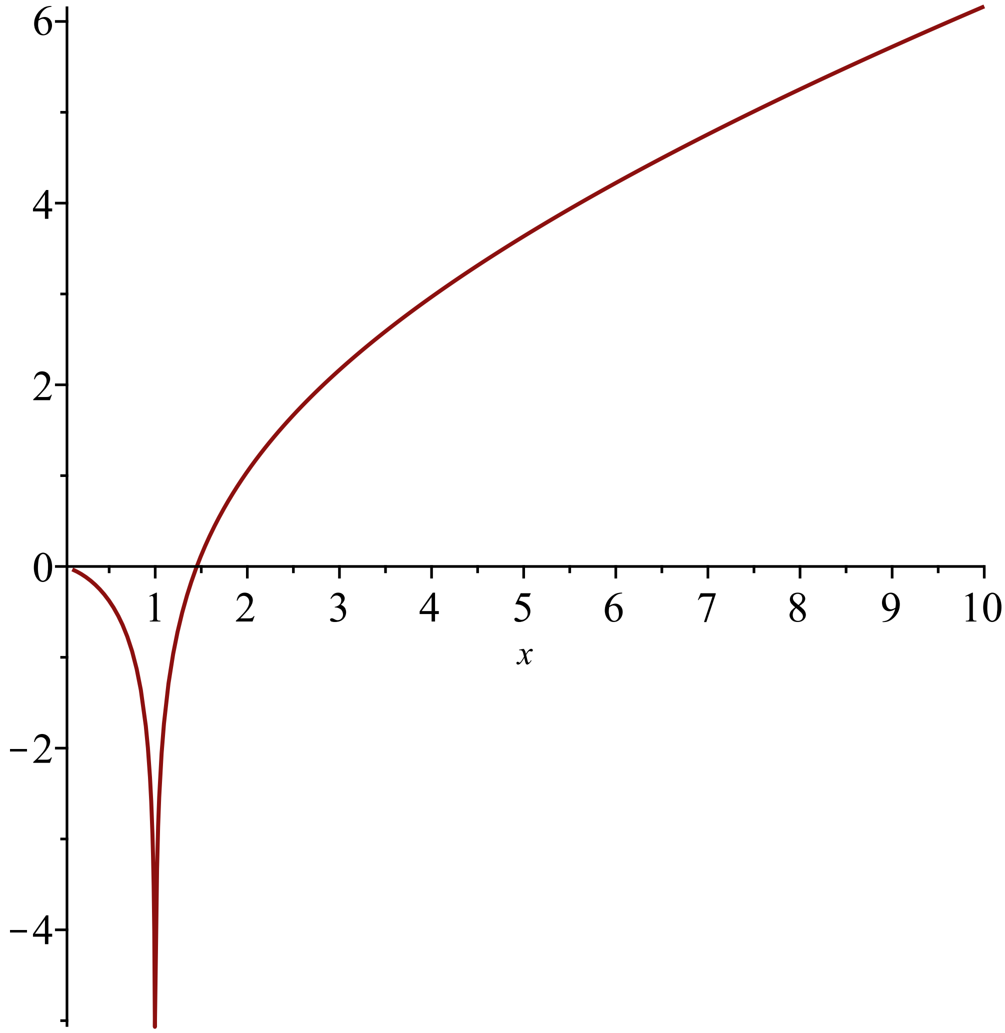

```
> plot(Ci(x),x=0.1..100);
```



> $plot(\mathrm{Si}(x), x = 0 ..50)$



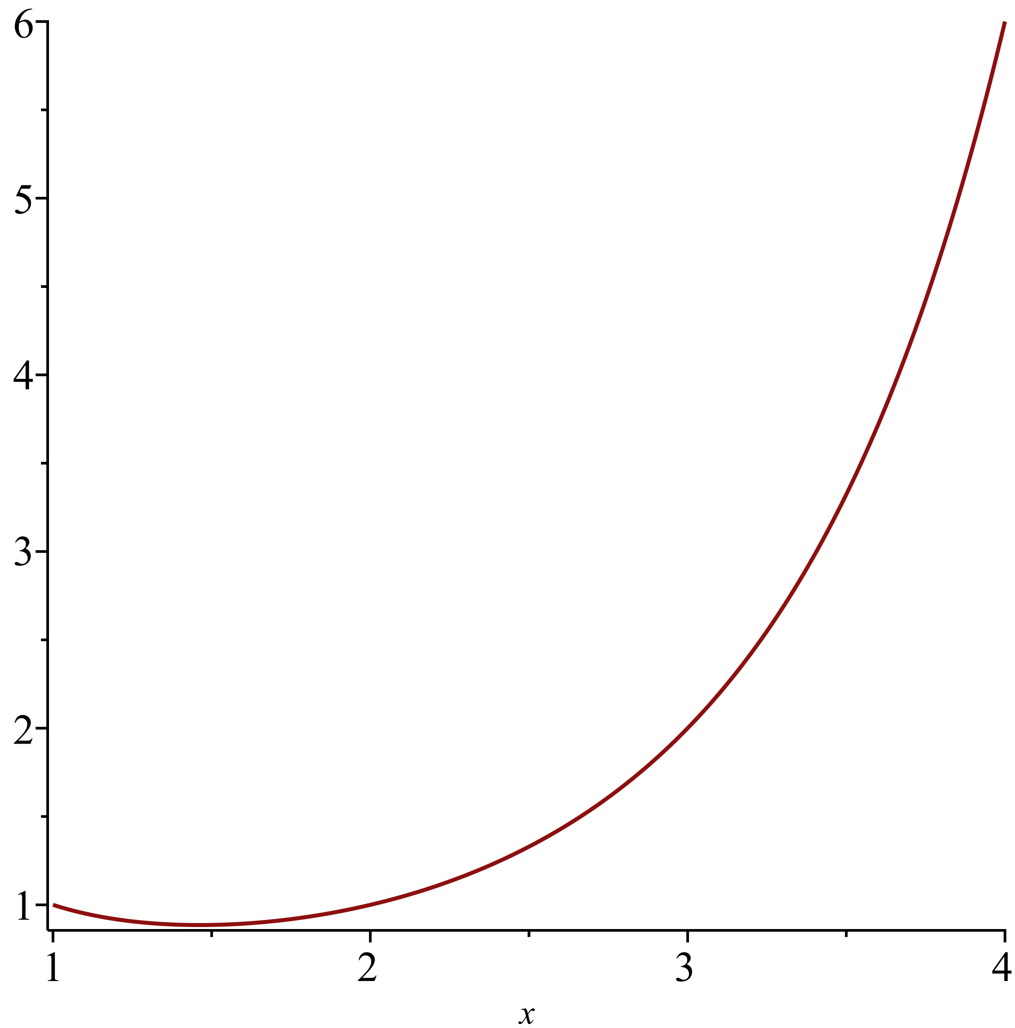

```
> plot(Li(x),x=0.1..10);
```



Die Gammafunktion ist als $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{(-t)}\, t^{(x-1)}\, dt$ für $0 < x$ definiert.

Mit Hilfe partieller Integration rechnet man nach, dass $\Gamma(n+1) = n!$
für alle natürlichen Zahlen n gilt.

```
> plot(GAMMA(x),x=1..4);
```



Eine Funktion, die in vielen Anwendungen auftritt, ist die sogenannte logistische Funktion $t \to \dfrac{\gamma}{\tau + \left(\dfrac{\gamma}{u_0} - \tau\right) e^{(-\gamma t)}}$, wir behandeln hier speziell den Fall $\gamma = 1, u_0 = 1$, $\tau = k$.

```
> f:=(k,t)->1/(k+(1-k)*exp(-t));
```

$$f := (k, t) \to \frac{1}{k + (1-k)\,e^{-t}} \tag{7}$$

Die Ableitung ergibt sich als:

```
> f1(k,t):=diff(f(k,t),t);
```

$$f1(k, t) := \frac{(1-k)\,e^{-t}}{\left(k + (1-k)\,e^{-t}\right)^2} \tag{8}$$

Die Funktion f erfüllt die Differentialgleichung $\frac{d}{dt} f(t) = \gamma f - \tau f^2$, den gleichen Typ

Differentialgleichung erhält man in der Chemie bei der autokatalytischen Reaktion:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \alpha f\,(A - f)$, die eine Reaktion beschreibt, bei der die Abnahme des Ausgangsstoffes proportional zur Menge des Ausgangsstoffes und (mit einer anderen Konstanten) zur Menge des bereits umgewandelten Stoffes ist (der katalytisch auf die weitere Reaktion einwirkt).

```
> f1(k,t)-f(k,t)+k*(f(k,t))^2;
```

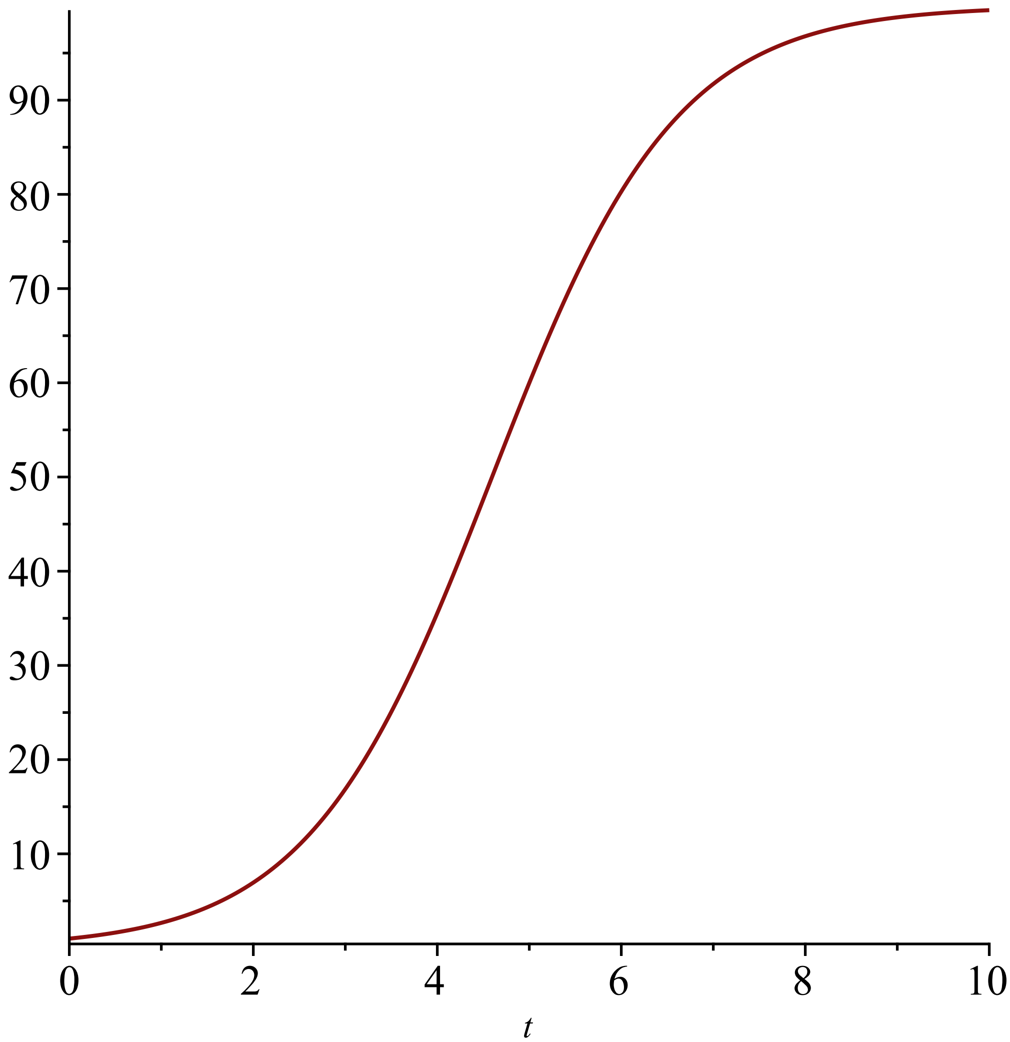
$$\frac{(1-k)\,\mathrm{e}^{-t}}{\left(k+(1-k)\,\mathrm{e}^{-t}\right)^2} - \frac{1}{k+(1-k)\,\mathrm{e}^{-t}} + \frac{k}{\left(k+(1-k)\,\mathrm{e}^{-t}\right)^2} \tag{9}$$

```
> simplify(%);
```

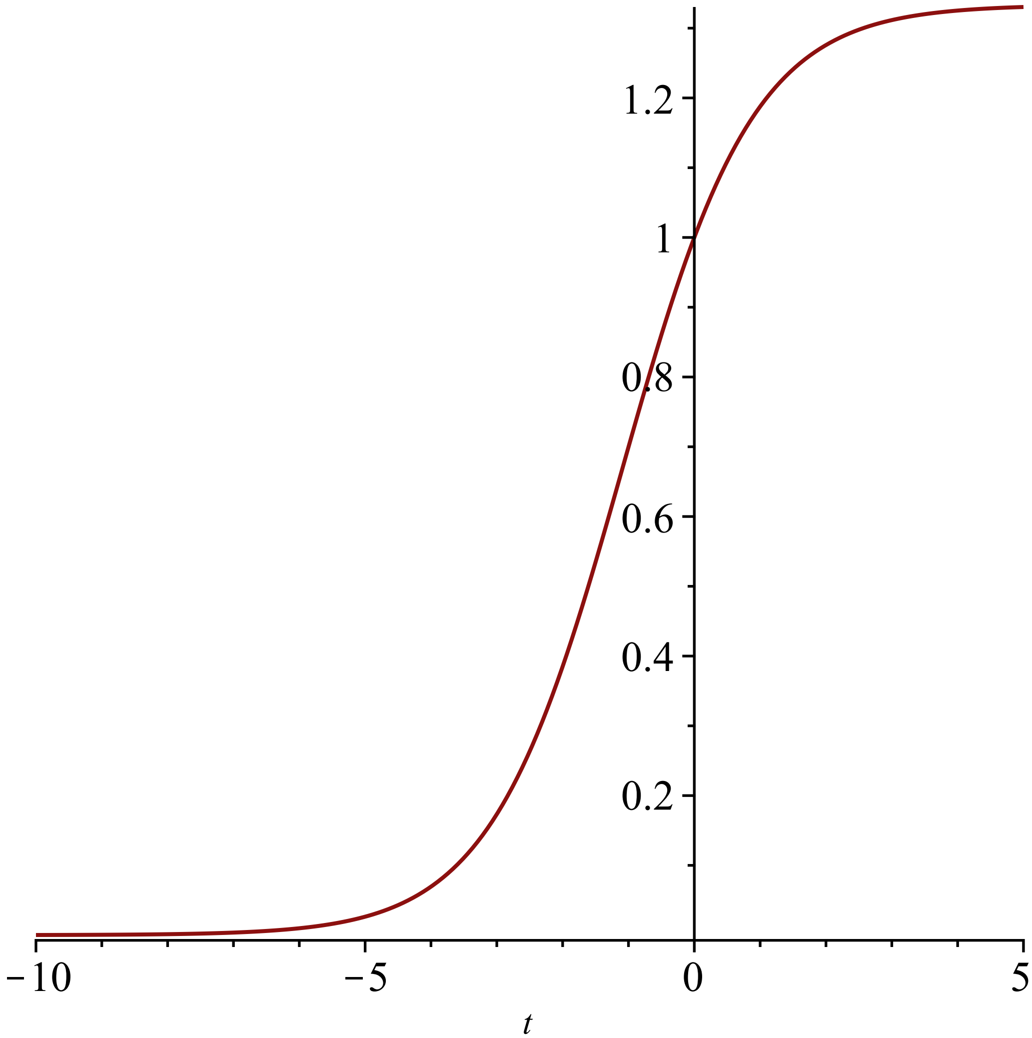
$$0 \tag{10}$$

Wir betrachten den Graphen für drei verschiedene Werte des Parameters k:

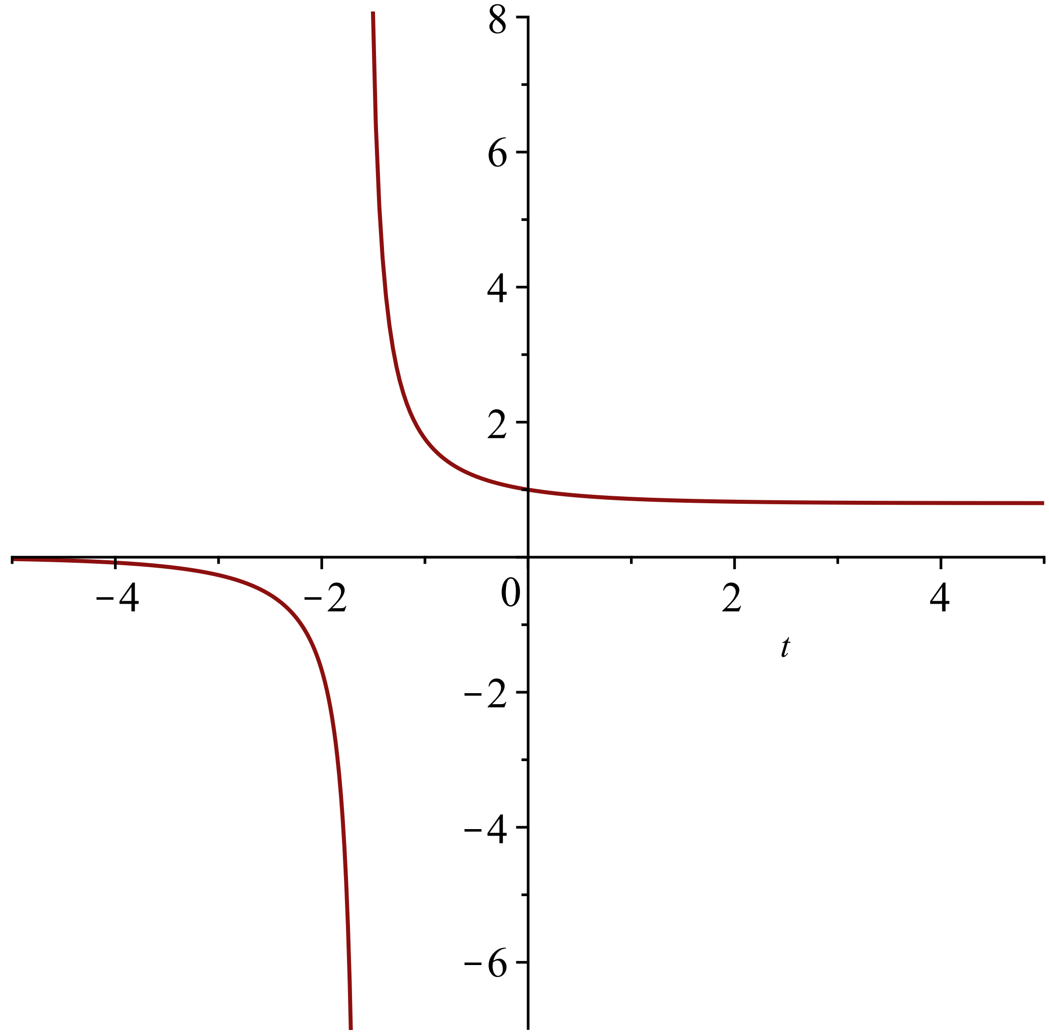
```
> plot(f(0.01,t),t=0..10);
```




```
> plot(f(0.75,t),t=-10..5);
```




```
> plot(f(1.25,t),t=-5..5,discont=true);
```


8
6
4
2
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
t

>