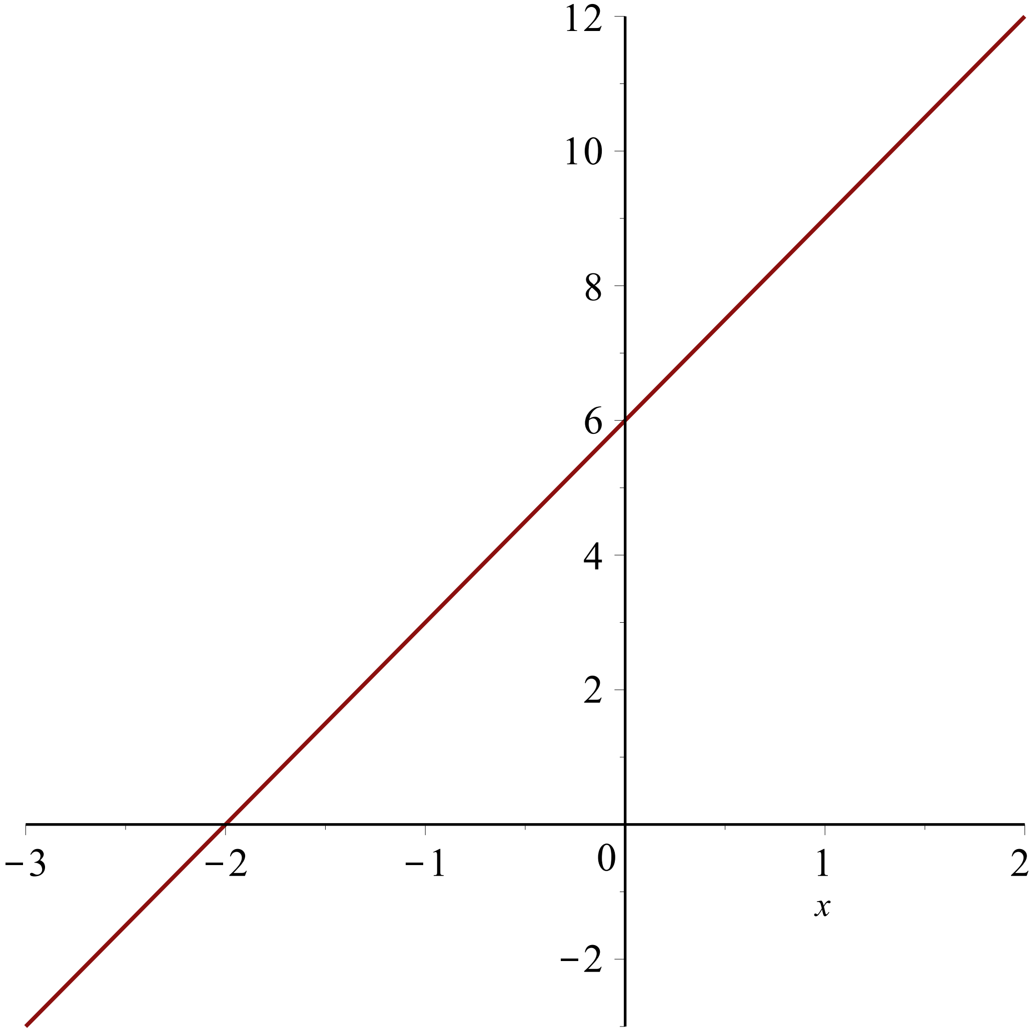
Einige Graphen spezieller Funktionen

Lineare Funktion: $f(x) = a\,x + b$. Der Graph ist eine Gerade (Linie), der Koeffizient a bei x gibt die Steigung der Geraden (den Tangens des Winkels, den die Gerade mit der x-Achse einschließt) an, der konstante Term b den Achsenabschnitt auf der y-Achse.

> $plot(3\,x + 6, x = -3\,..2)$;

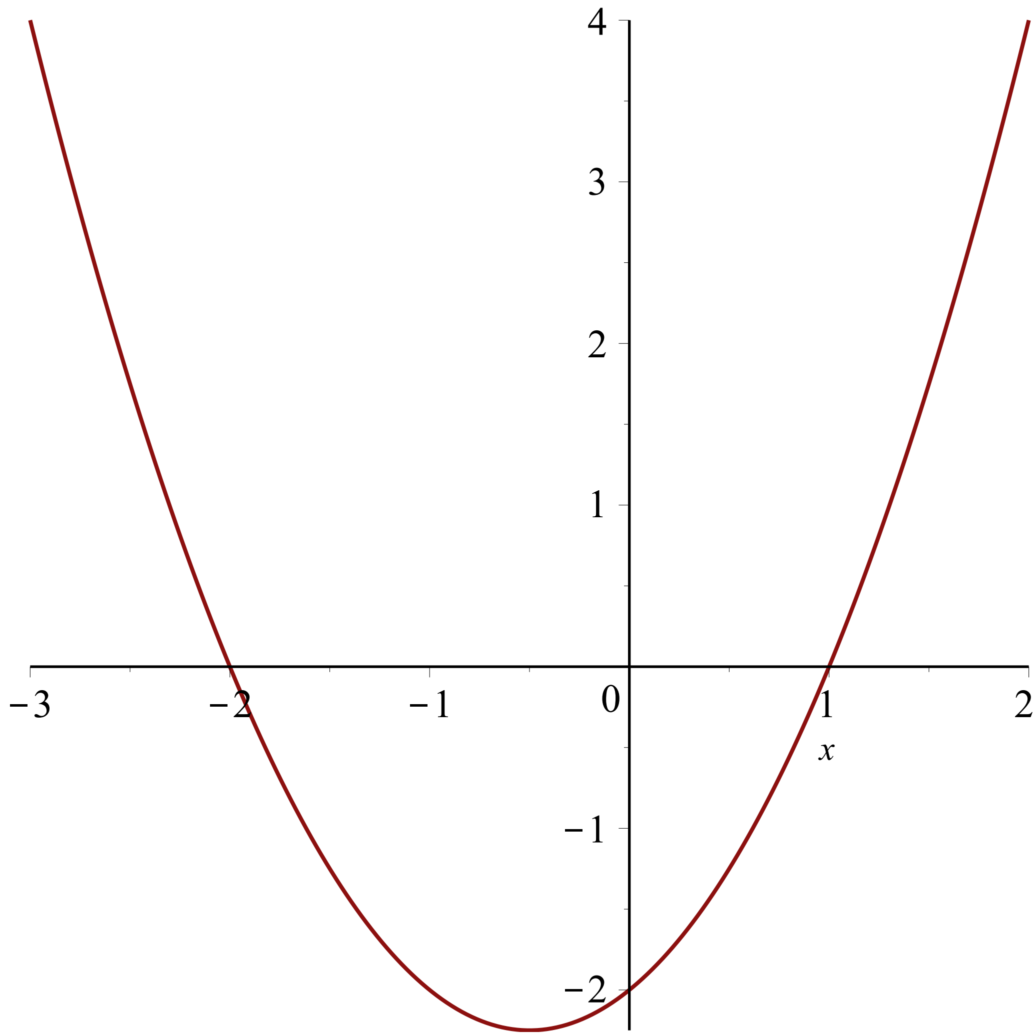


Quadratische Funktion $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $a \neq 0$. Der Graph ist eine Parabel, nach oben oder unten geöffnet, je nach dem Vorzeichen des Koeffizienten a von x^2.

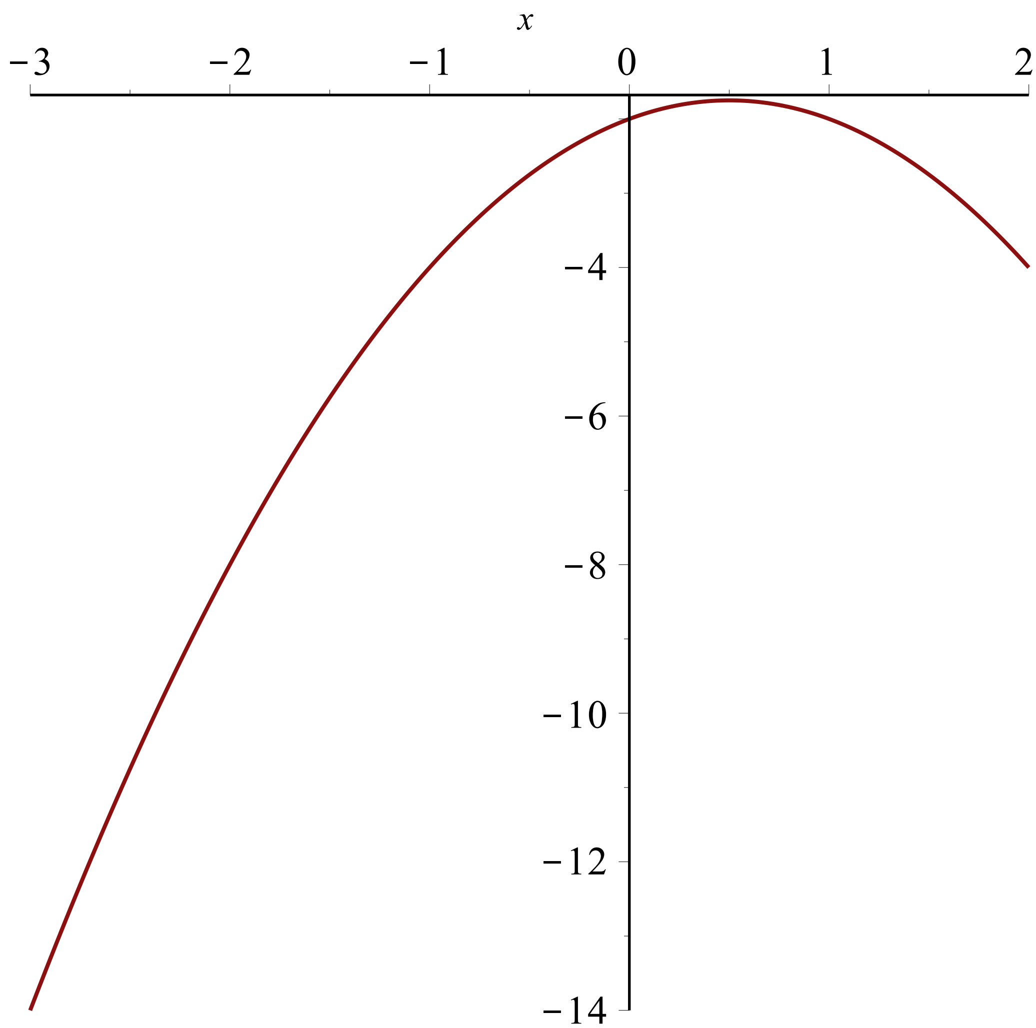
> $expand((x-1)\,(x+2))$;

$$x^2 + x - 2 \tag{1}$$

> $plot(x^2 + x - 2, x = -3\,..2)$;

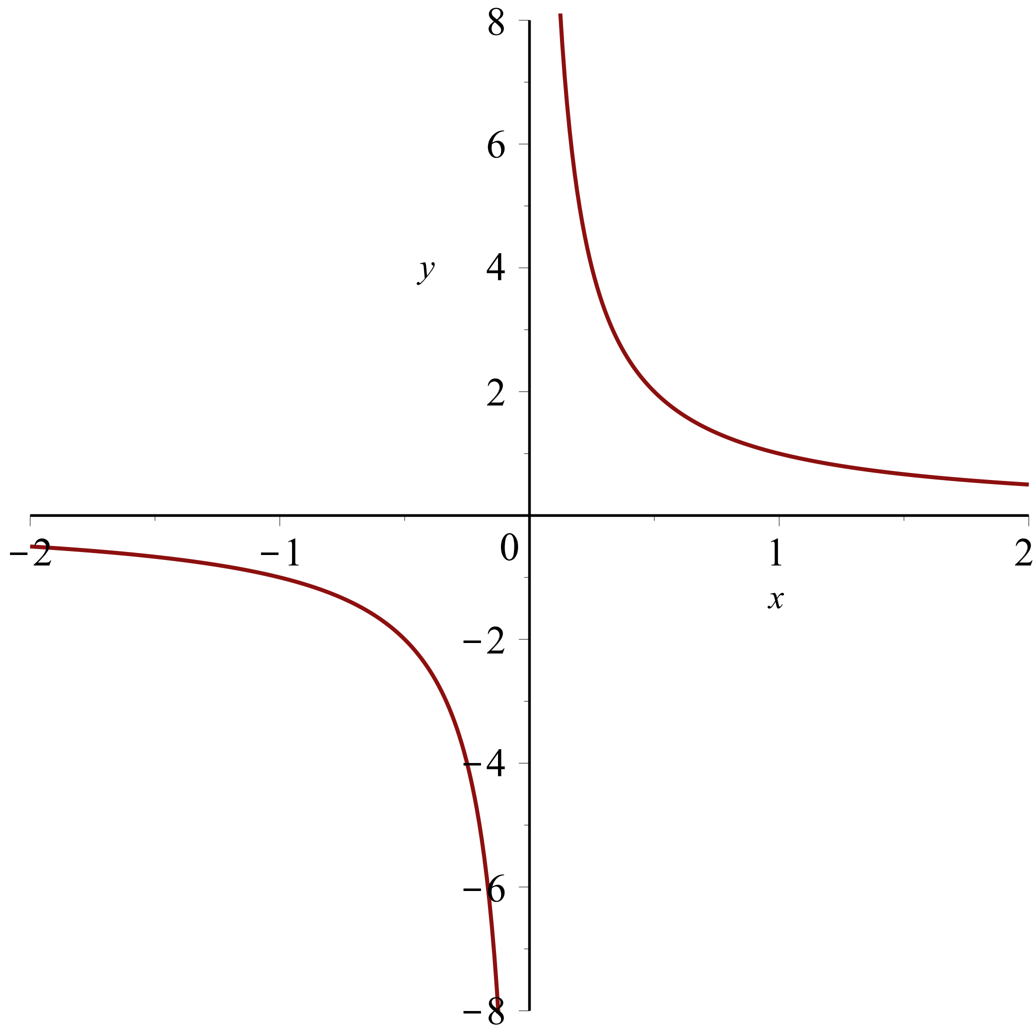


> $plot(-x^2 + x - 2, x = -3 ..2);$

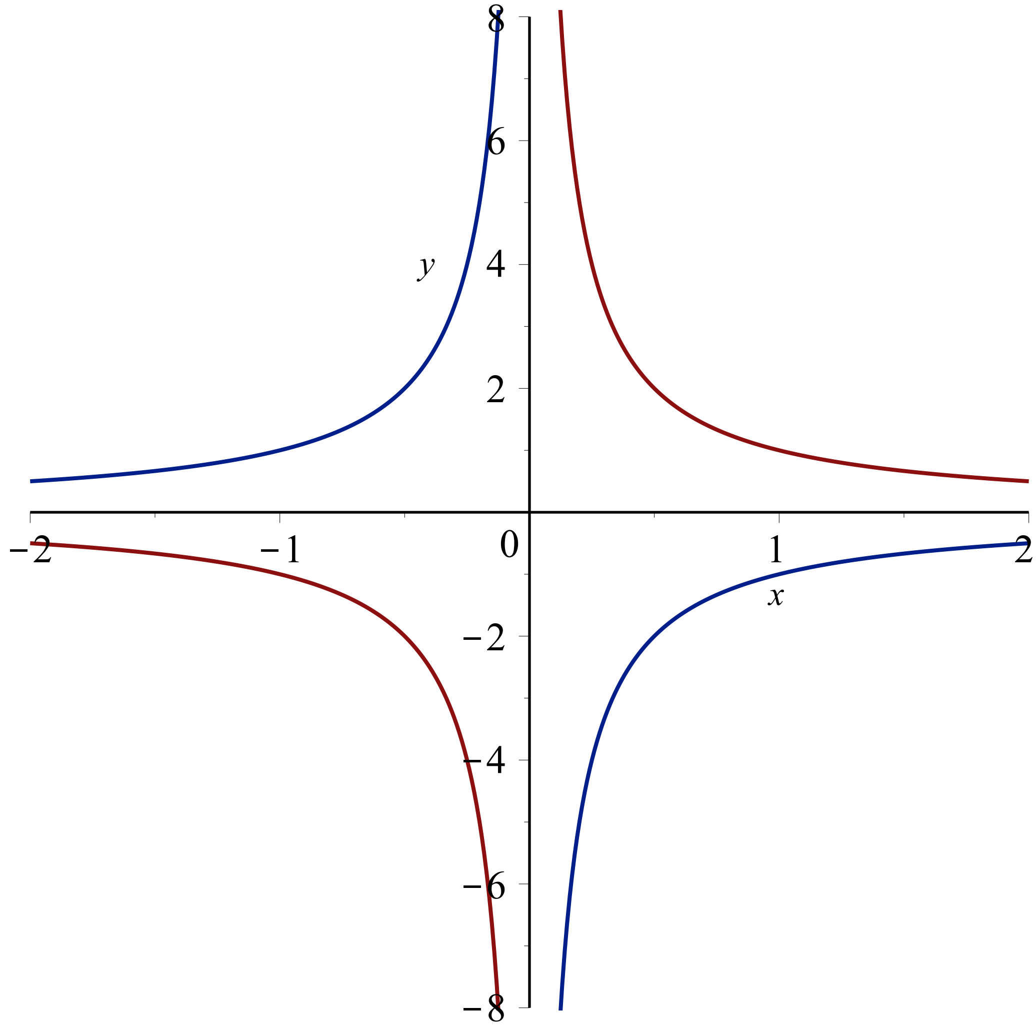


Rationale Funktionen: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{x}$ beschreibt eine umgekehrte Proportionalität; sie hat als Graphen eine Hyperbel mit zwei Aesten

> $plot\left(\frac{1}{x}, x = -2..2, y = -8..8, discont = true\right);$

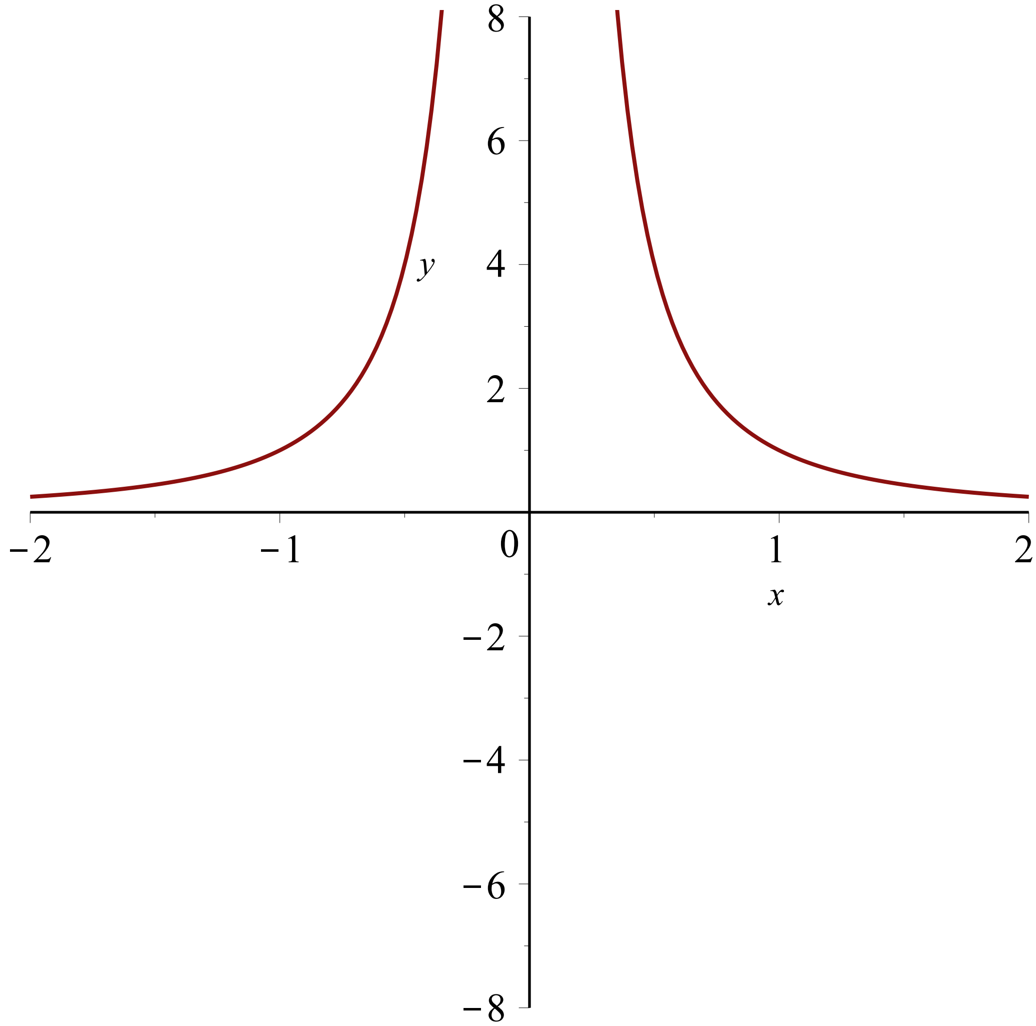


> $plot\left(\left\{\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right\}, x = -2\,..2, y = -8\,..8, discont = true\right);$



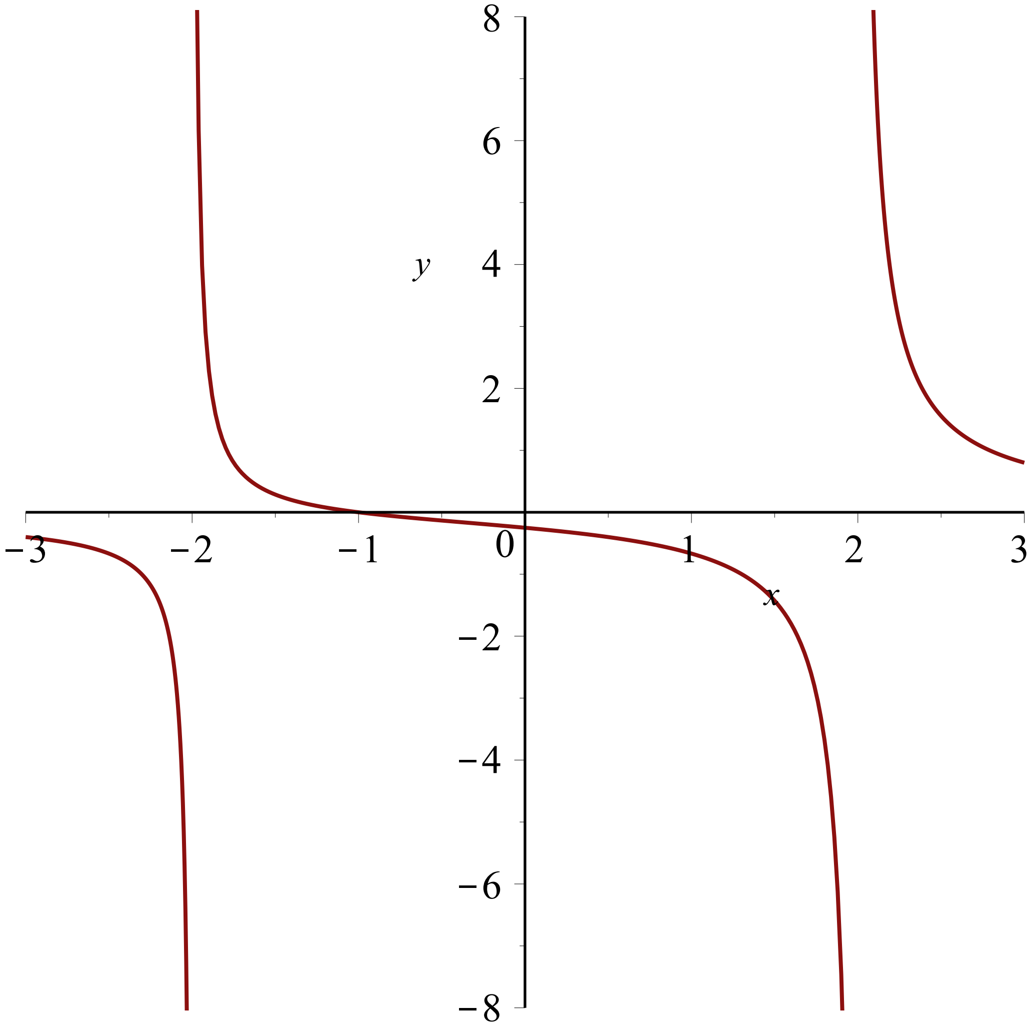
Ähnlich sieht der Graph für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ aus:

> $plot\left(\frac{1}{x^2}, x = -2\,..2, y = -8\,..8, discont = true\right);$



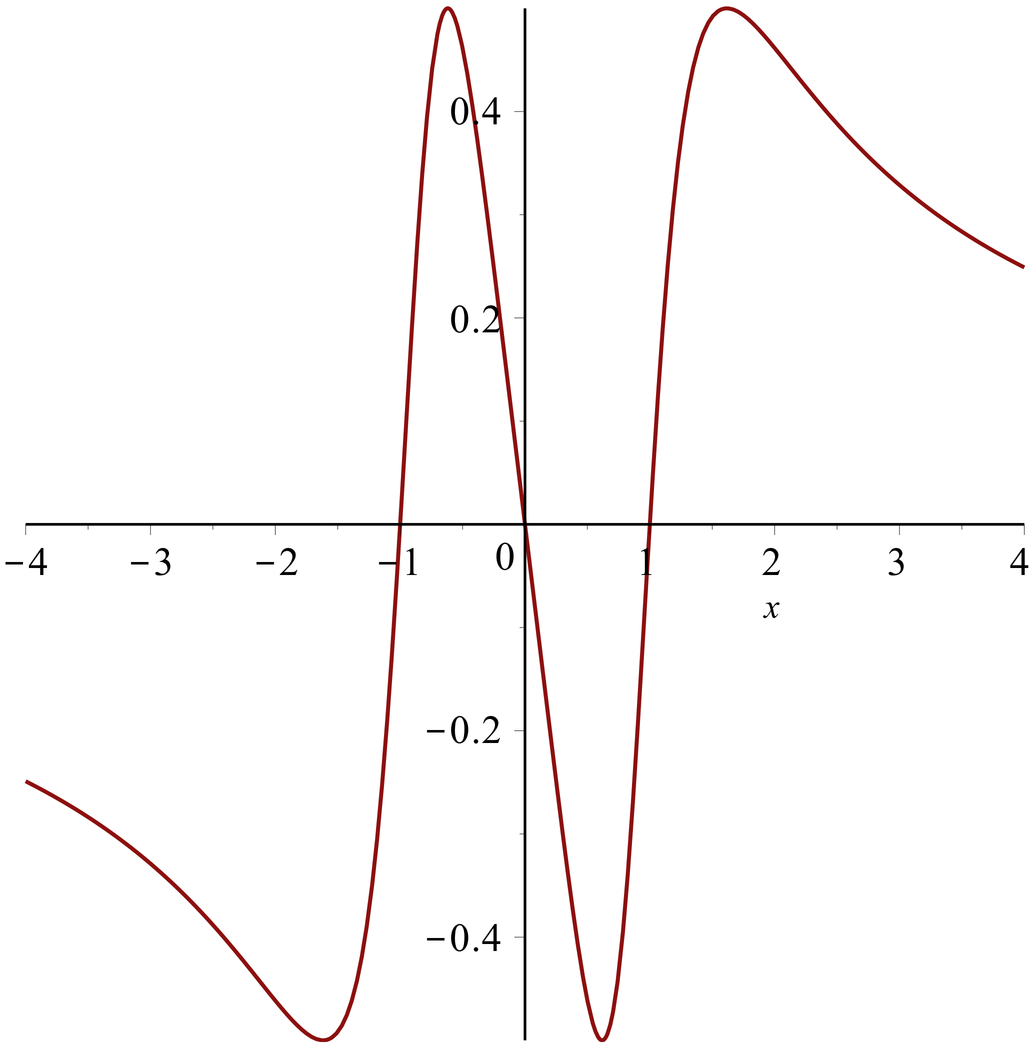
Hier noch eine weitere rationale Funktion:

> $plot\left(\dfrac{x+1}{x^2-4}, x=-3..3, y=-8..8, discont=true\right);$

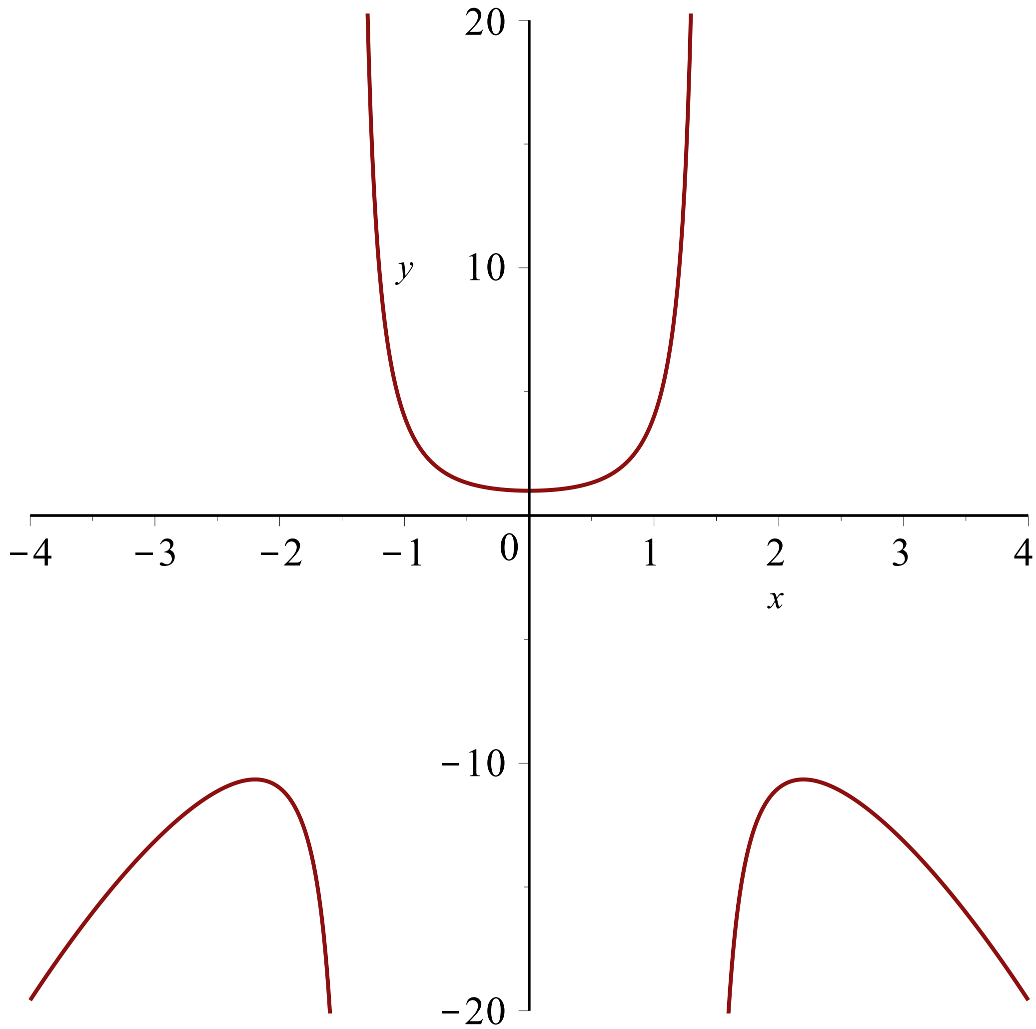


Noch ein paar Beispiele fuer gerade und ungerade rationale Funktionen:

> $plot\left(\frac{(x^3 - x)}{1 - x^2 + x^4}, x = -4..4\right);$

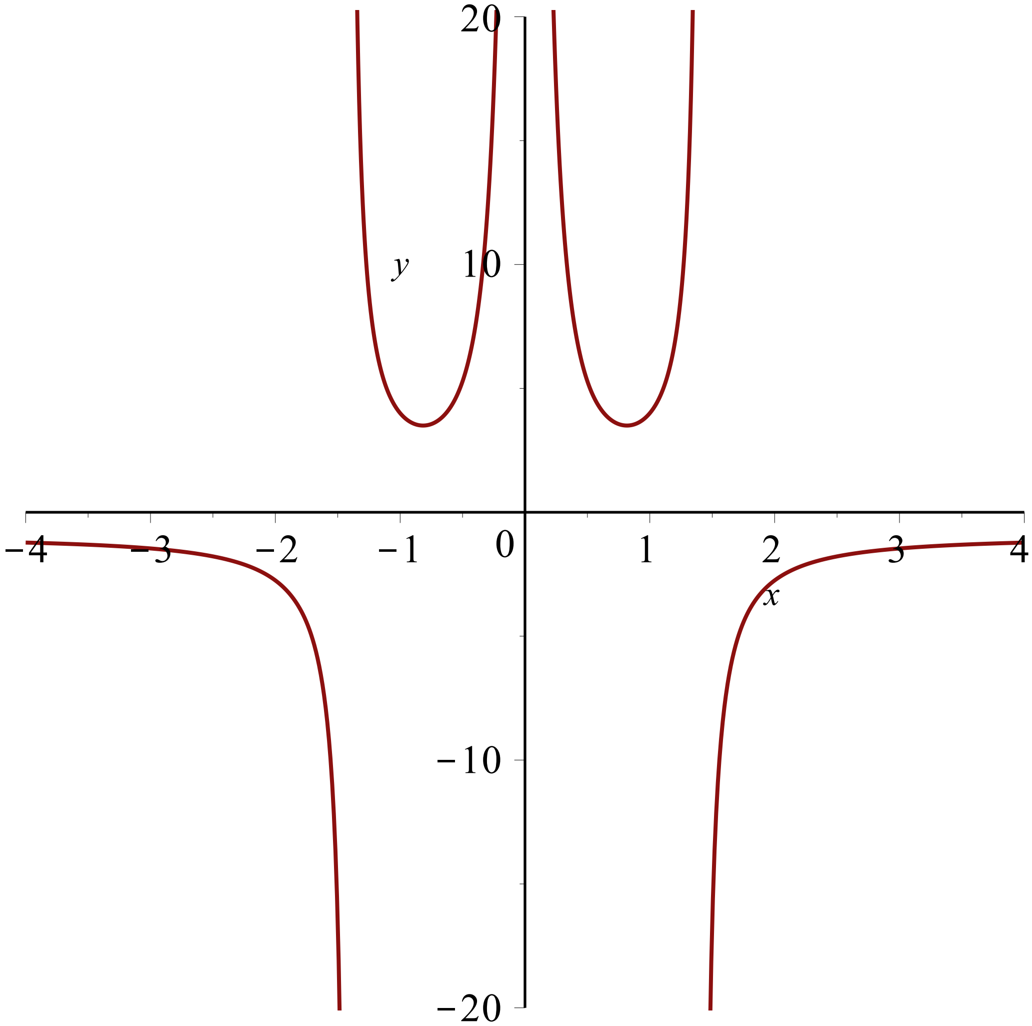


> $plot\left(\dfrac{x^5 + x^3 + 2\,x}{2\,x - x^3}, x = -4\,..4, y = -20\,..20, discont = true\right);$



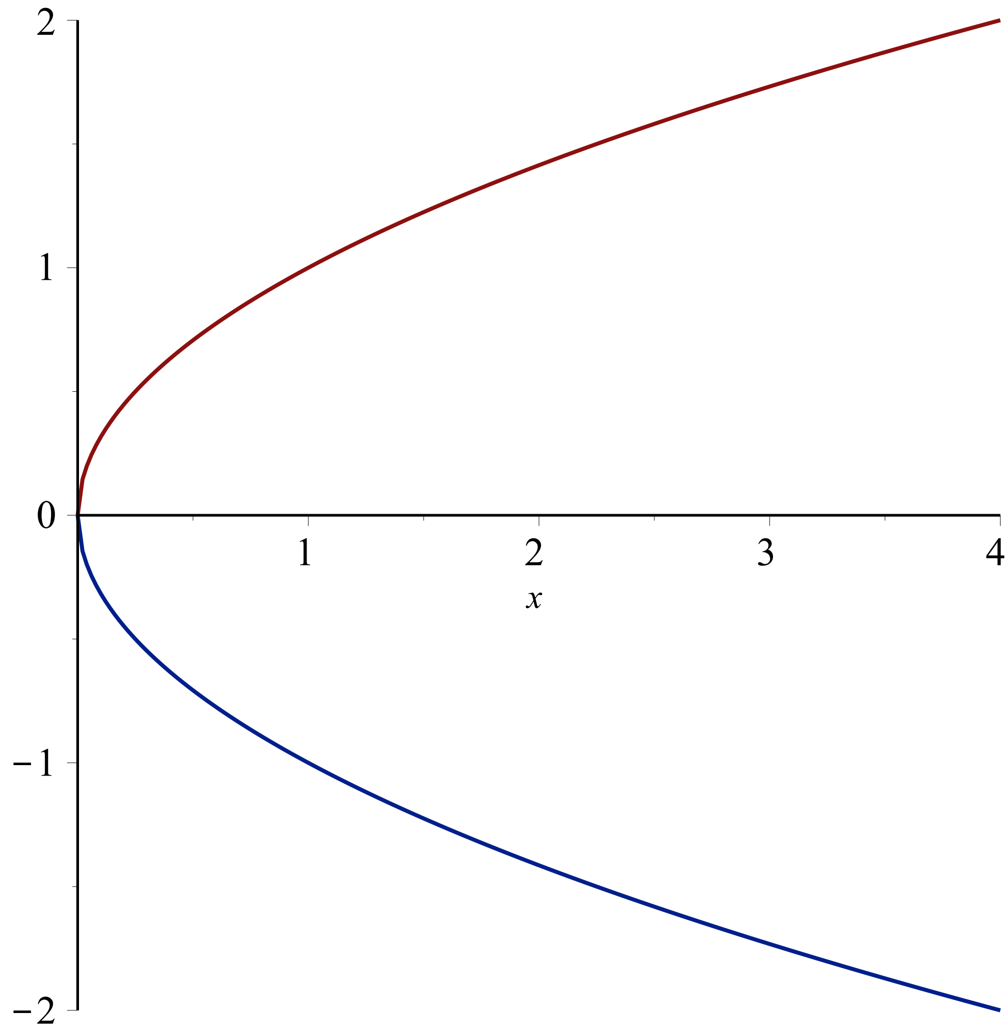
Die letzte Funktion ist gleichzeitig ein Beispiel fuer die Moeglichkeit, in einer rationalen Funktion einen in Zaehler und
Nenner vorkommenden Faktor (hier den Faktor x) zu kuerzen und dadurch den Definitionsbereich zu erweitern (hier:
Die Funktion kann in den Punkt x=0 fortgesetzt werden, obwohl der Nenner hier eine Nullstelle hat).
Hat dagegen die Nullstelle im Nenner groessere Vielfachheit als im Zaehler, so ist die rationale Funktion an dieser Stelle nicht definiert.

$$> \ plot\left(\frac{x^5+x^3+2x}{2x^3-x^5}, x=-4..4, y=-20..20, discont=true\right);$$



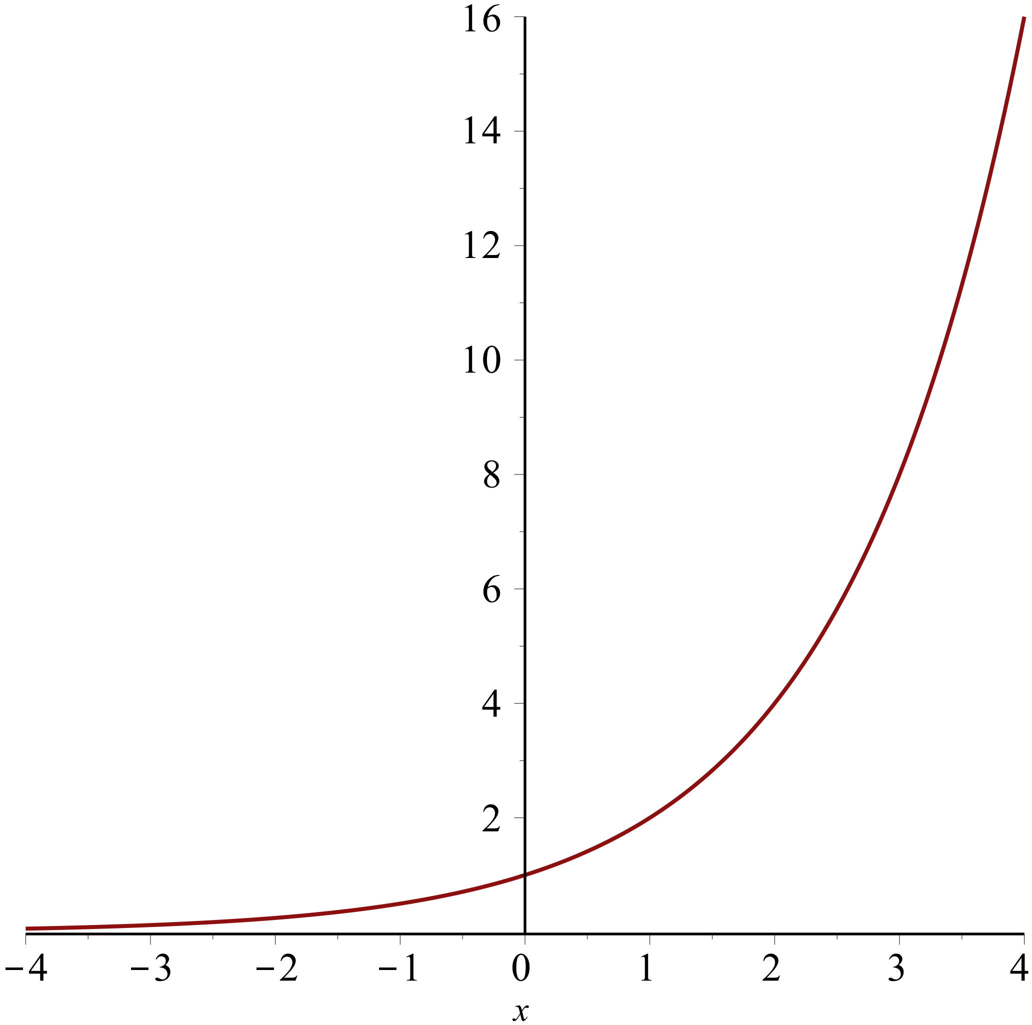
Die Wurzelfunktion ist nur für Argumente >=0 definiert. Wir zeichnen gleichzeitig den Graphen für die positive und den für die negative Wurzel (man beachte, dass es keine Funktion gibt, deren Graph die gesamte unten dargestellte Kurve, die aus allen Punkten wäre:

> $plot\left(\left\{x^{\left(\frac{1}{2}\right)}, -x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}, x = 0 ..4\right);$

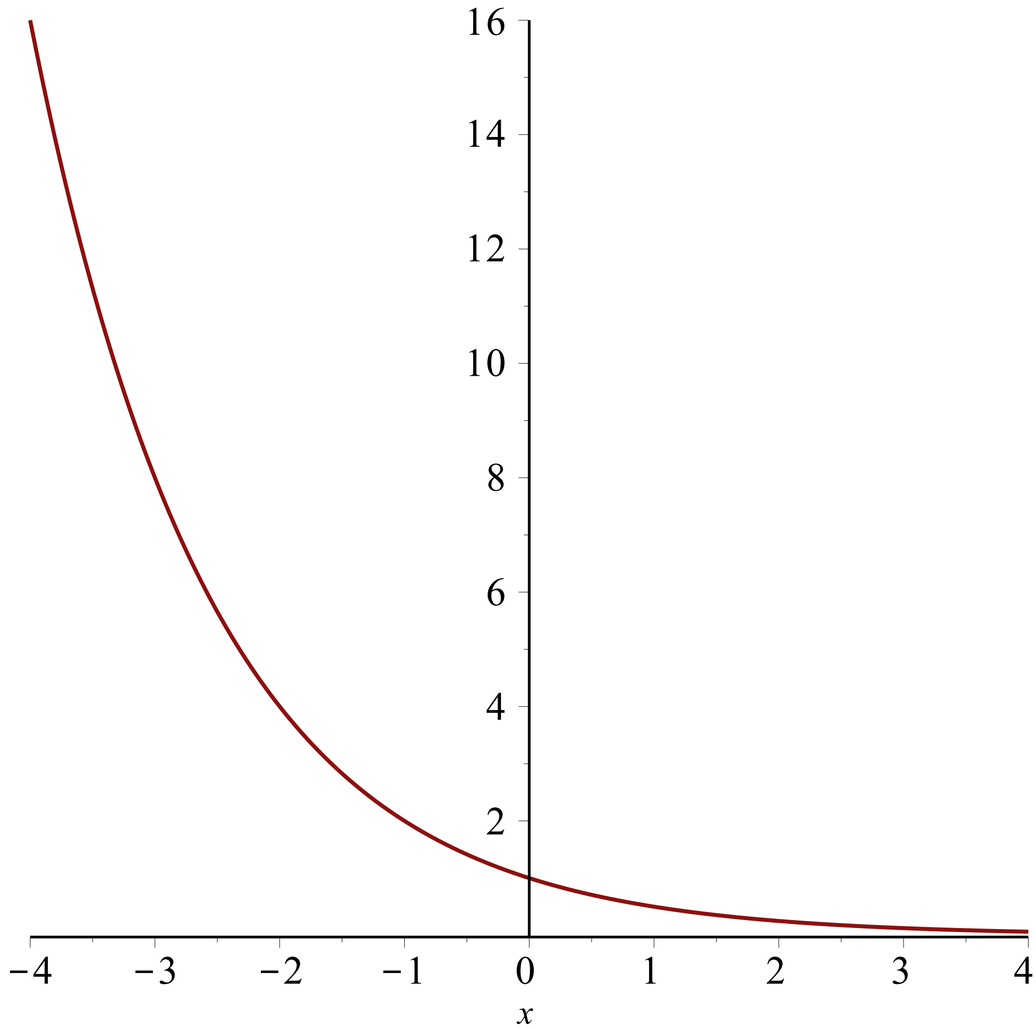


Die Exponentialfunktion nimmt nur positive Werte an und wächst für grosse Werte des Arguments x sehr rasch: Bei Verdoppeln des Arguments wird der Funktionswert quadriert. Ihr Kehrwert fällt dementsprechend sehr rasch ab.

> $plot(2^x, x = -4..4);$

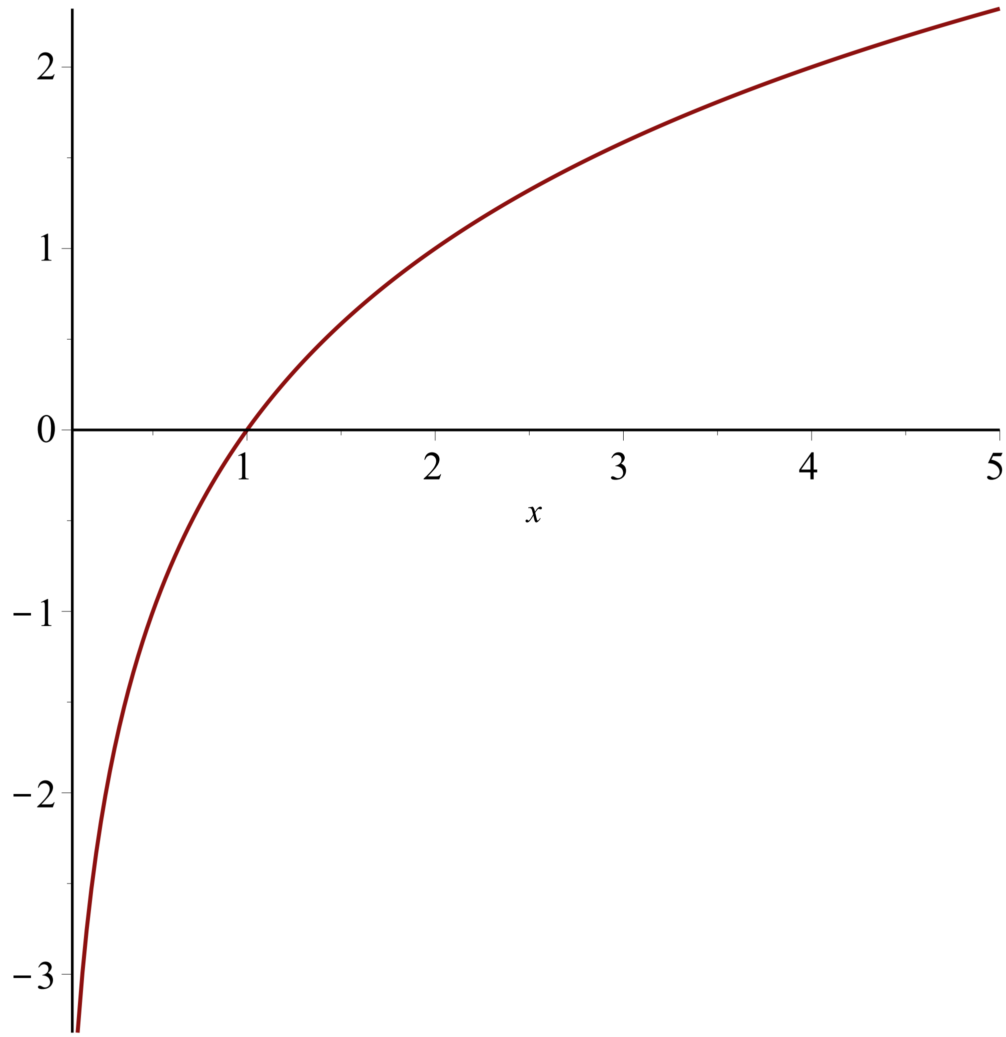


> $plot\left(2^{(-x)}, x = -4..4\right);$



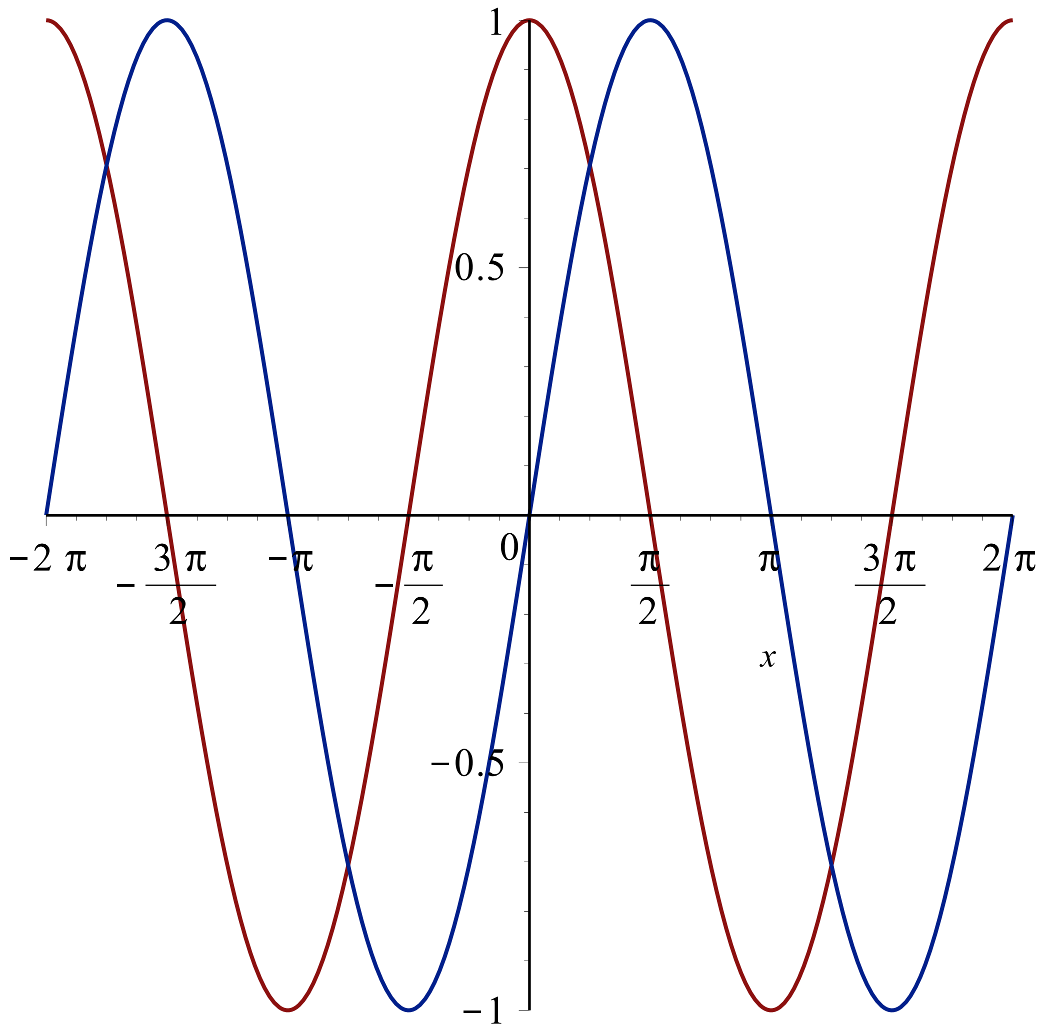
Der Logarithmus ist die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion; er ist nur für Argumente >0 definiert und wächst sehr langsam an.

> $plot\left(\log_2(x), x = 0.1 ..5\right);$



Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sind periodisch mit *Periode* 2π

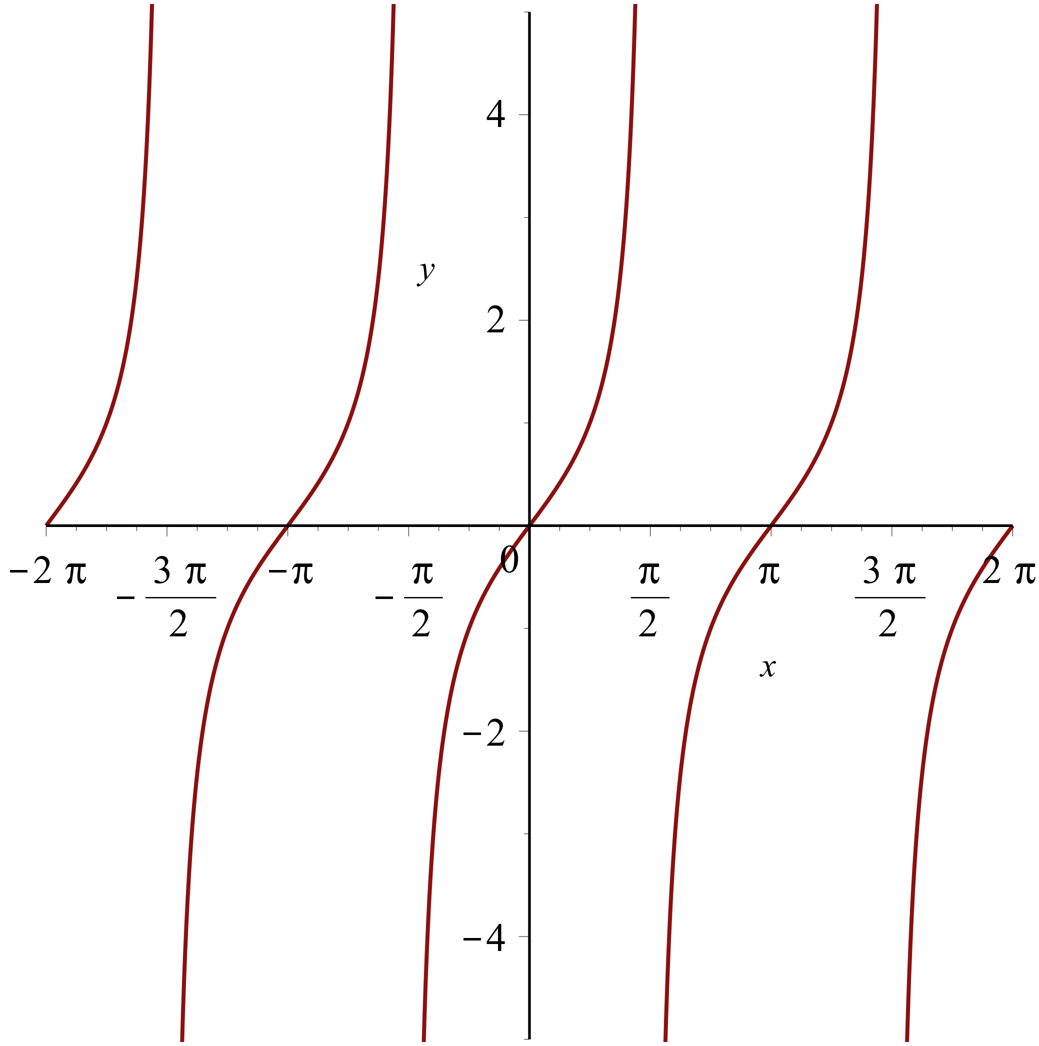
> $plot(\{\sin(x), \cos(x)\}, x = -2\,\mathrm{Pi}..2\,\mathrm{Pi});$



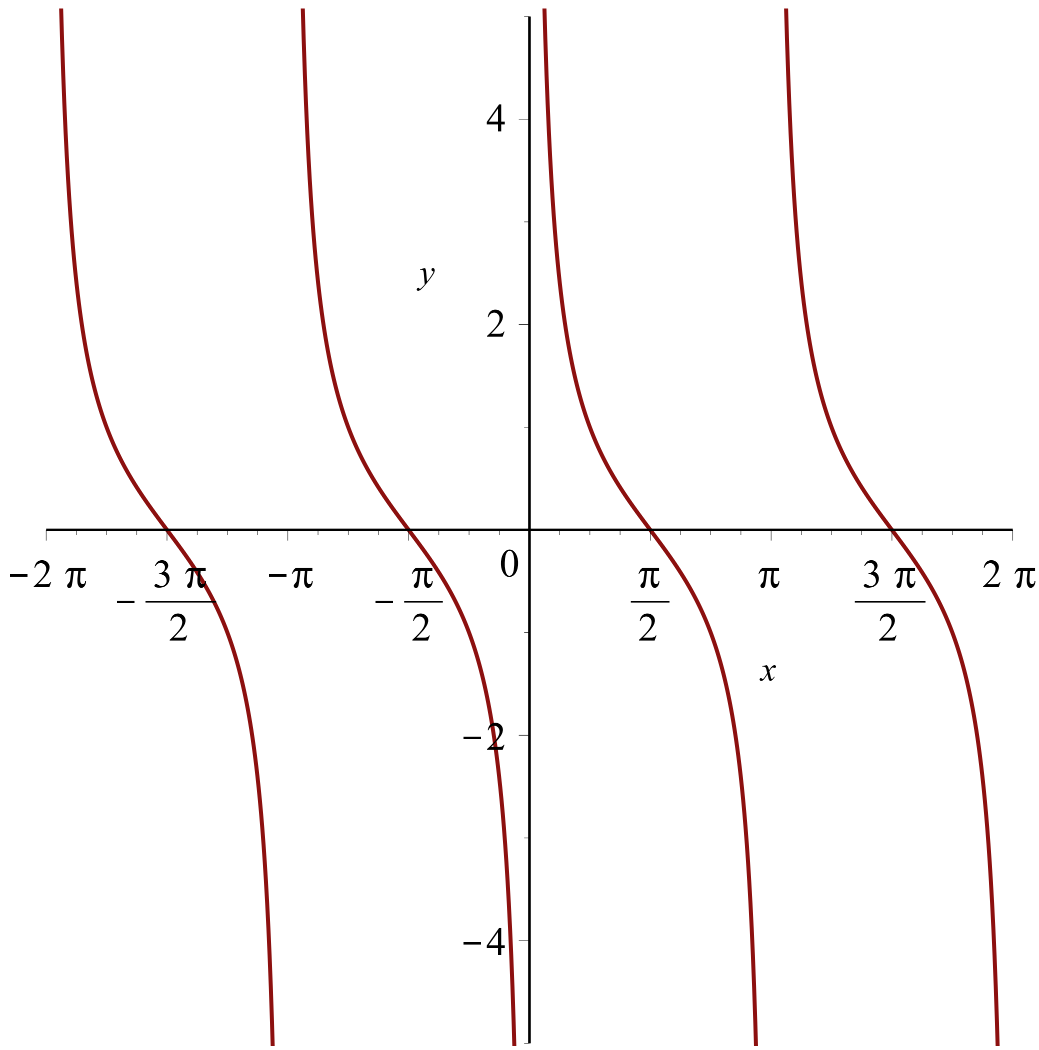
Der Tangens ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, er ist nicht definiert in den Nullstellen $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ des Cosinus.

Analog ist der Cotangens nicht definiert in den Nullstellen $k\,\pi$ des Sinus.

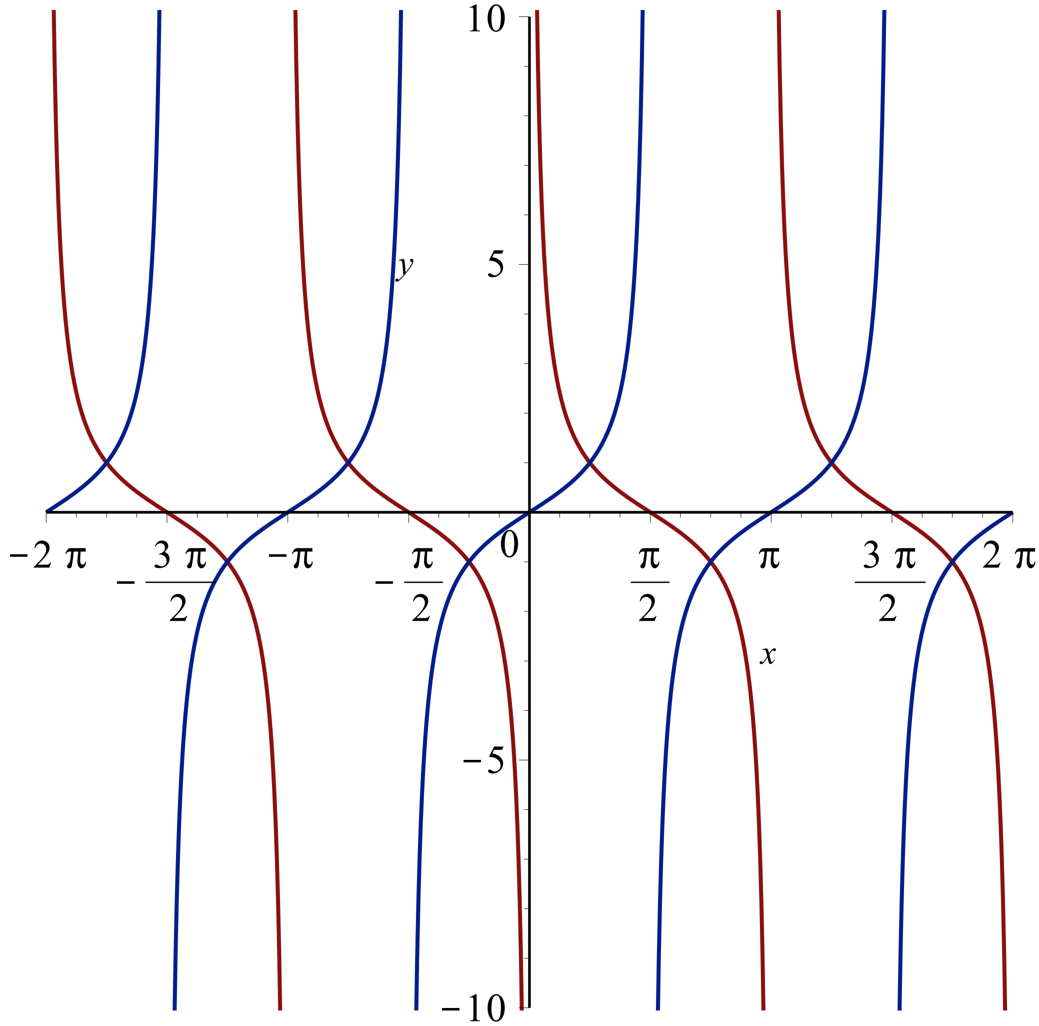
```
> plot(tan(x), x = -2 Pi ..2 Pi, y = -5 ..5, discont = true);
```



> $plot(\cot(x), x = -2\,\mathrm{Pi}\,..2\,\mathrm{Pi}, y = -5\,..5, discont = true);$

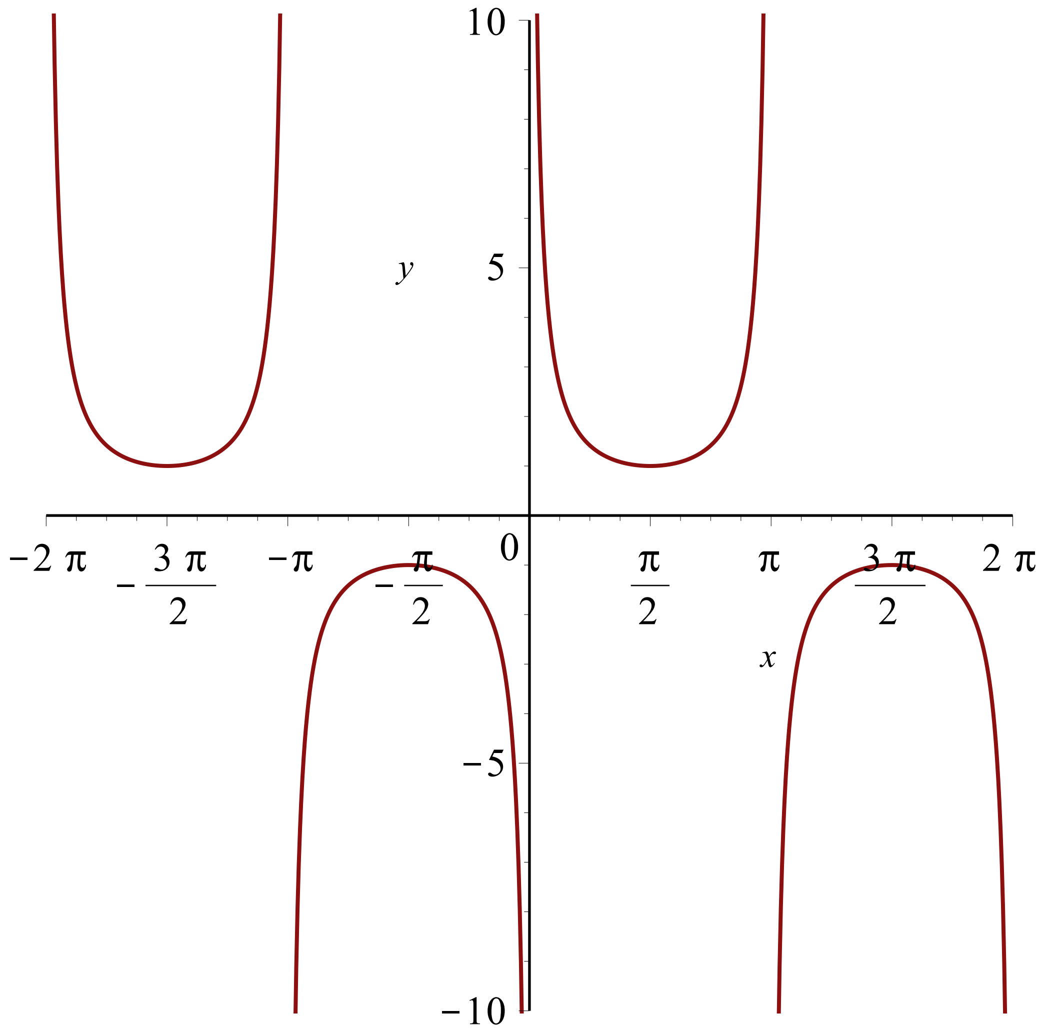


> *plot*({tan(*x*), cot(*x*)}, *x* = −2 Pi ..2 Pi, *y* = −10 ..10, *discont* = *true*);



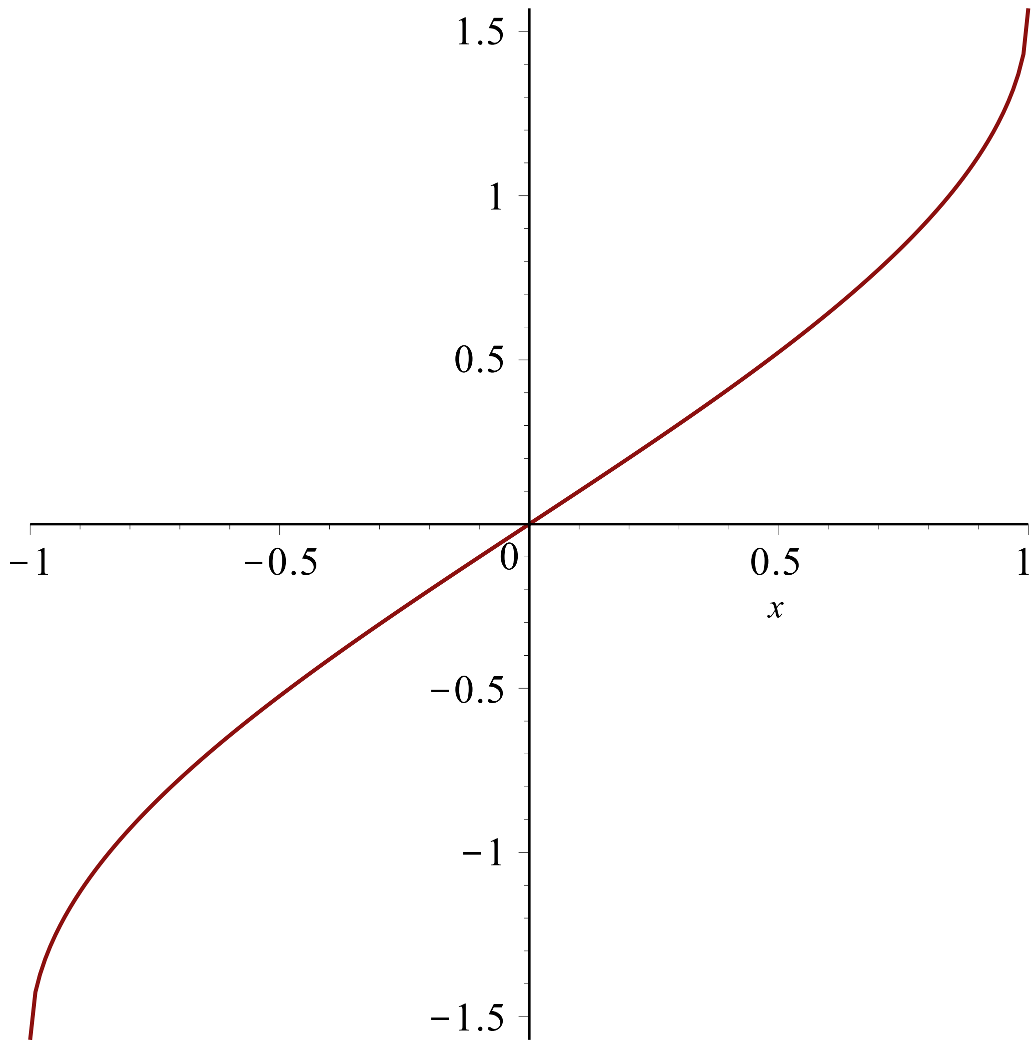
Häufig werden auch die Notationen $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ und $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ (auch als cosec x geschrieben) benutzt.

```
> plot( {csc(x)}, x = -2 Pi..2 Pi, y = -10..10, discont = true);
```

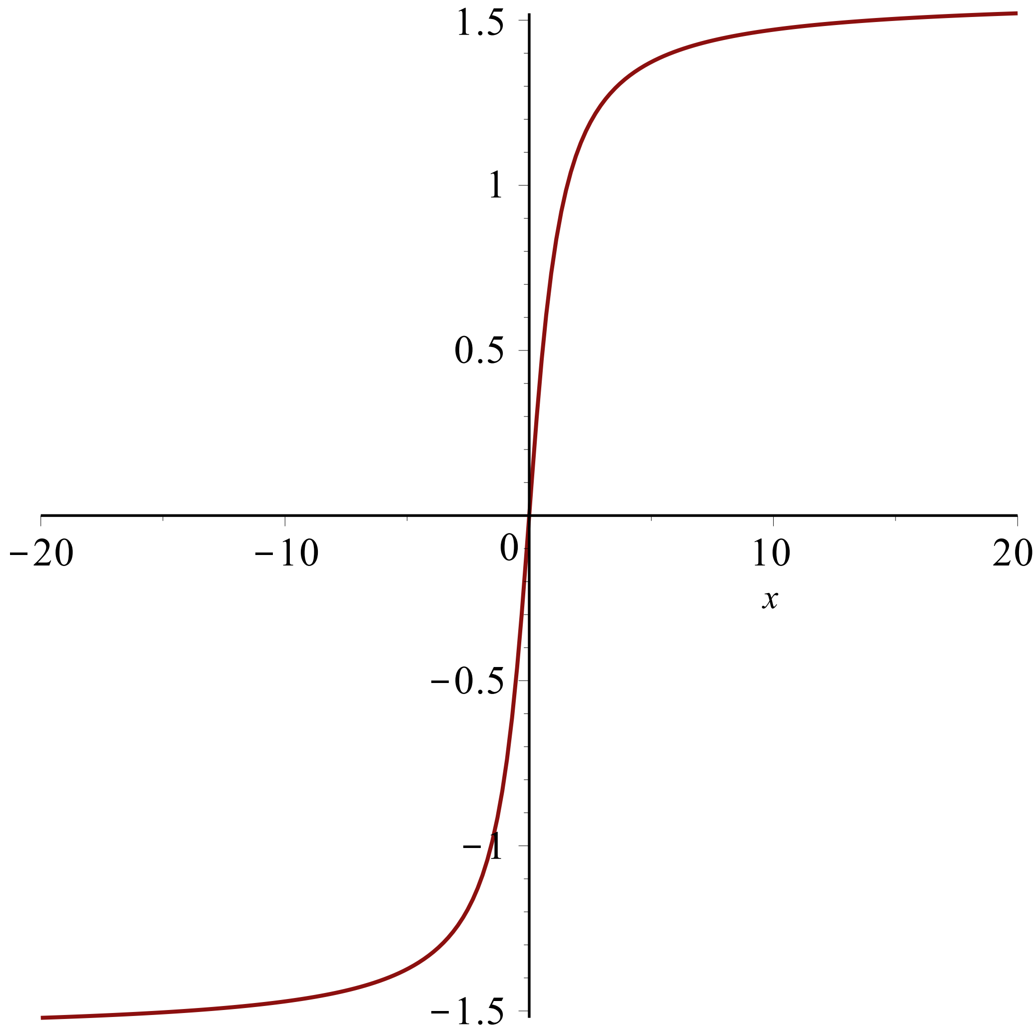


Die Umkehrfunktion des Sinus wird mit arcsin bezeichnet, analog hat man arccos, arctan, arccot als Umkehrfunktionen für Cosinus, Tangens und Cotangens.

```
> plot(arcsin(x), x = -1 ..1);
```



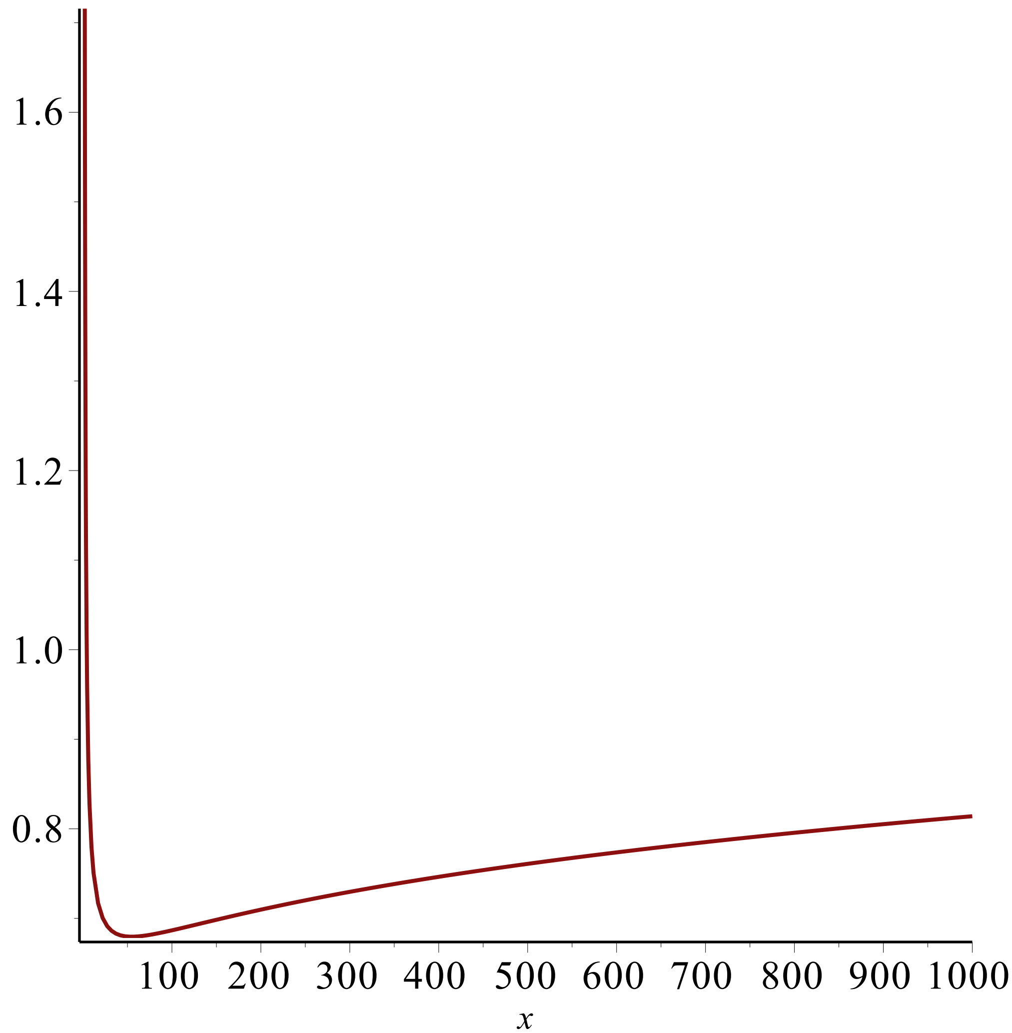
> $plot(\arctan(x), x = -20..20);$



Wachstum von Funktionen:

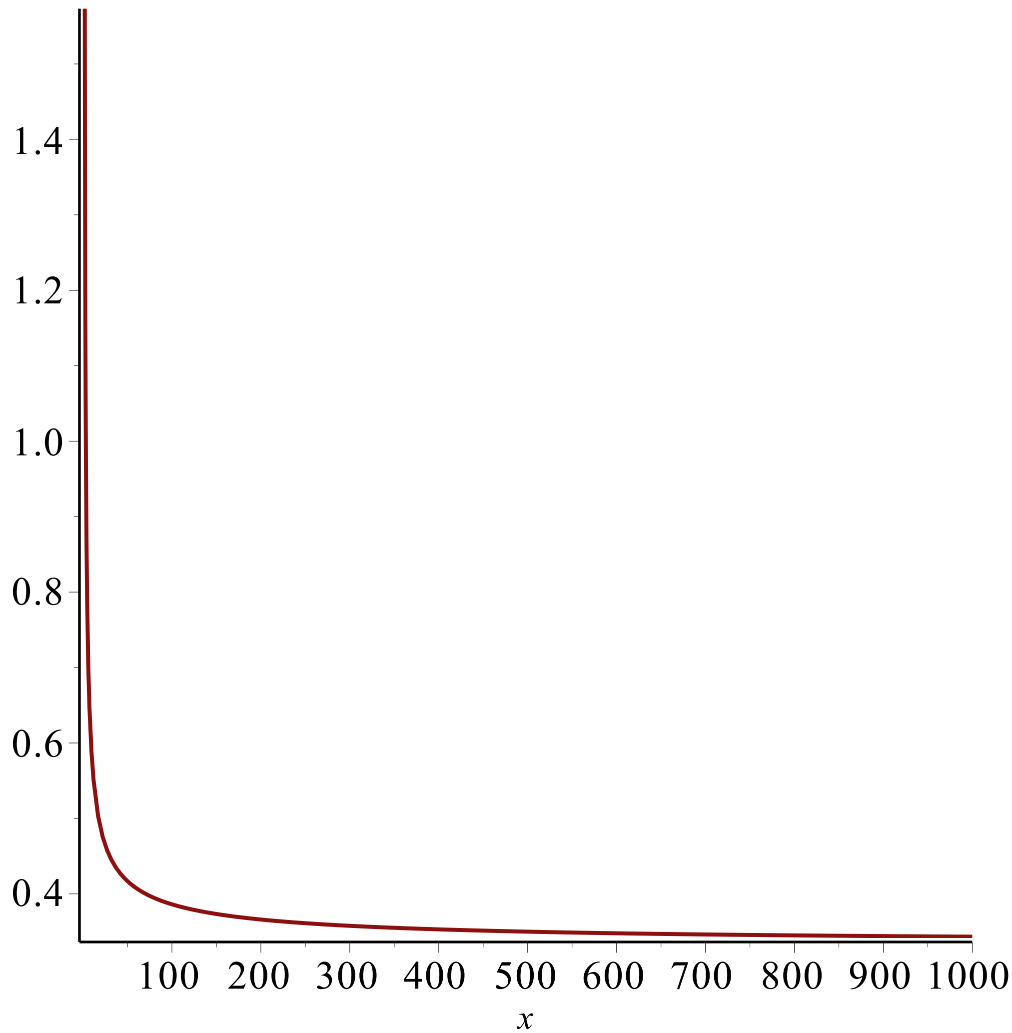
Der Logarithmus $\log(x) = \ln(x)$ von x wächst nur sehr langsam mit x. Man vergleiche die Logarithmusfunktion mit einer kleinen Potenz von x, etwa $x^{\left(\frac{1}{4}\right)}$, indem man das Verhalten des Quotienten beider Funktionen für wachsendes x betrachtet. Anfänglich fällt der Qoutient ab, das heißt, der Logarithmus wächst zunächst stärker als die vierte Wurzel. Etwa bei $x = 70$ kehrt sich aber der Trend um: Der Quotient steigt wieder, das heißt, die vierte Wurzel wächst nun schneller als der Logarithmus.

```
> plot(x^(1/4)/log(x),x=2..10^3);
```

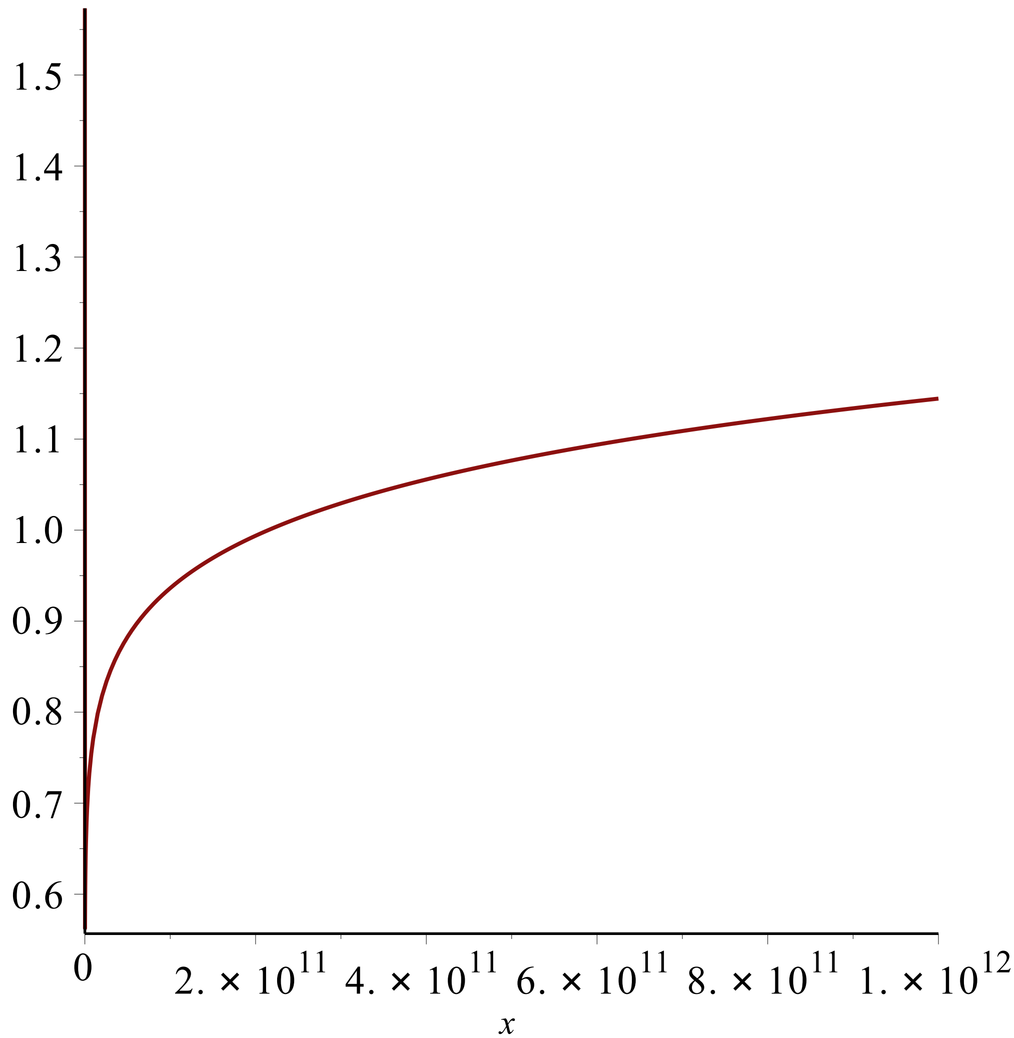


Das gleiche Verhalten beobachtet man beim Vergleich der achten Wurzel $x^{\left(\frac{1}{8}\right)}$ aus x mit dem Logarithmus:

```
> plot(x^(1/8)/log(x),x=2..10^3);
```



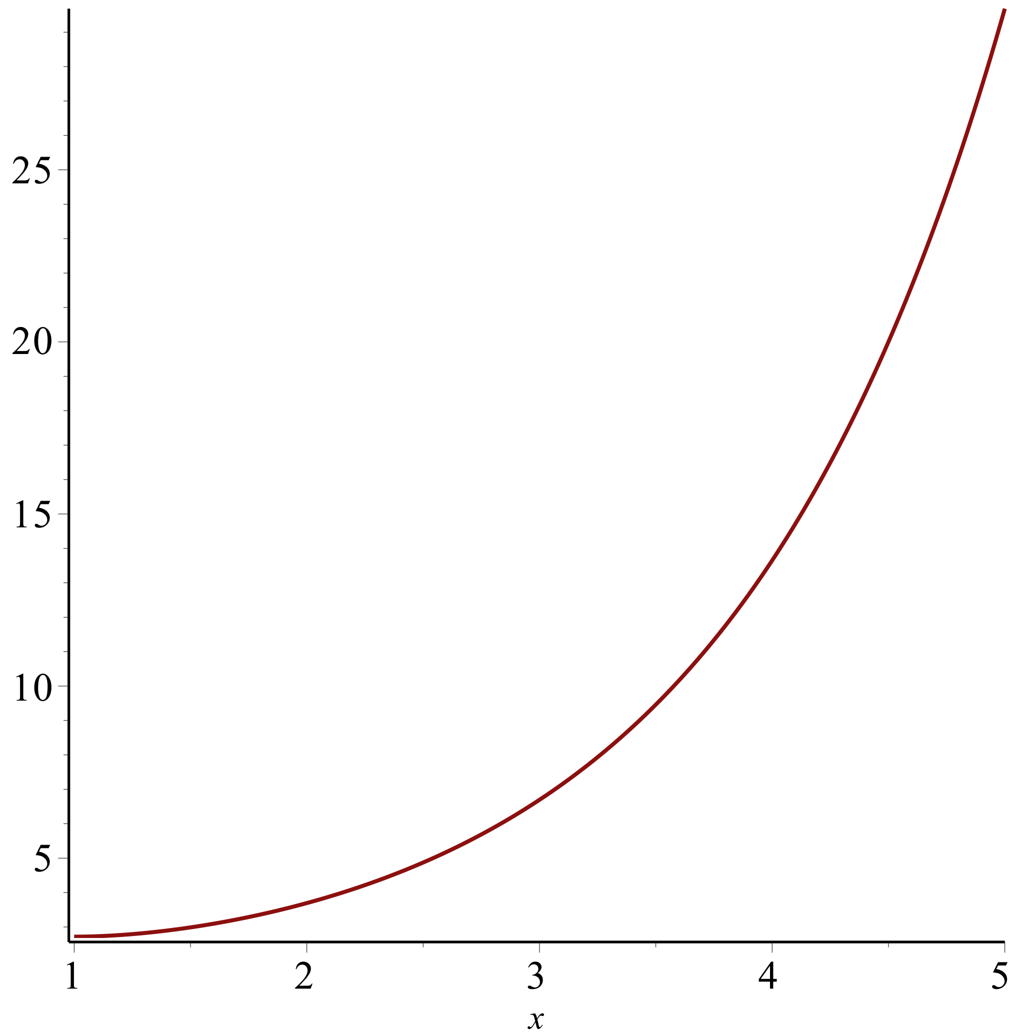

```
> plot(x^(1/8)/log(x),x=2..10^12);
```



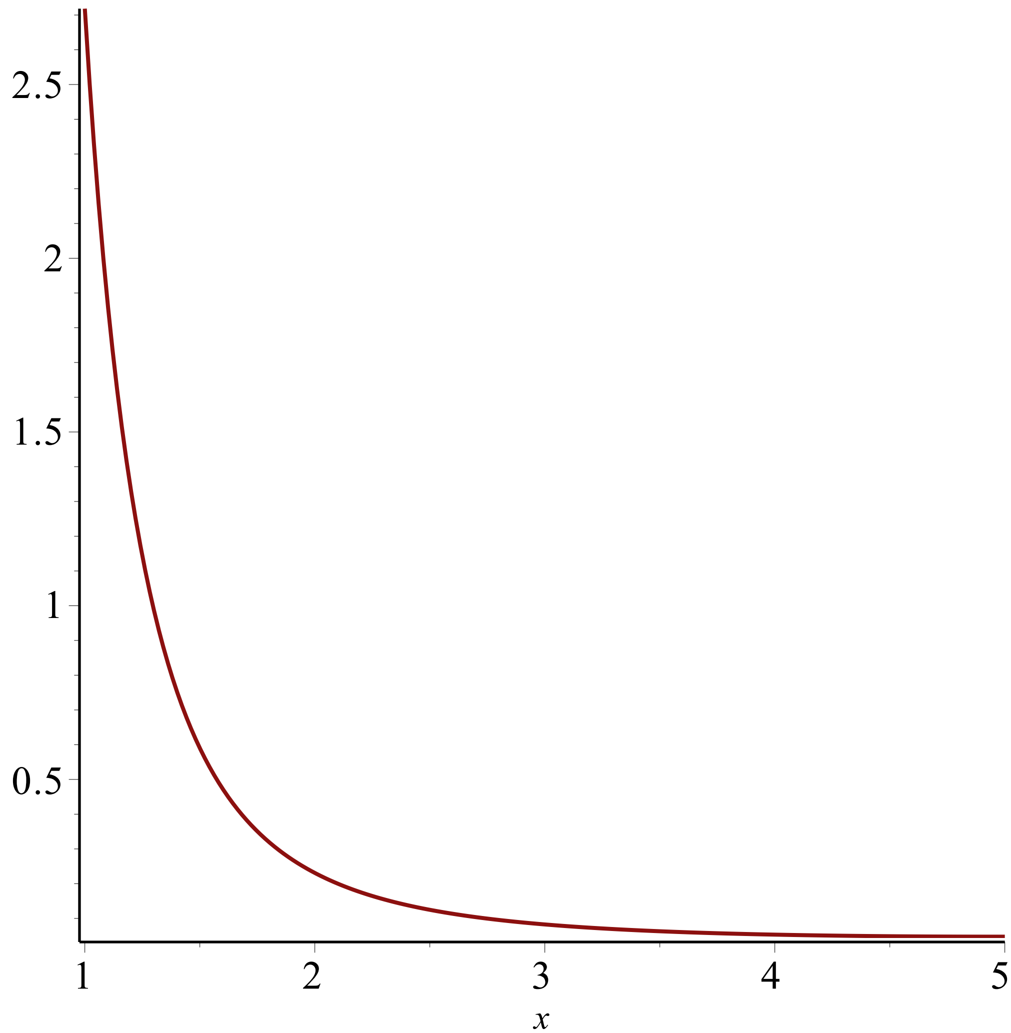
Wir werden bald sehen: Der Logarithmus von x (zu beliebiger Basis) wächst für große x langsamer als jede Potenz von x.

Dagegen wächst die Exponentialfunktion e^x schneller als jede Potenz von x.

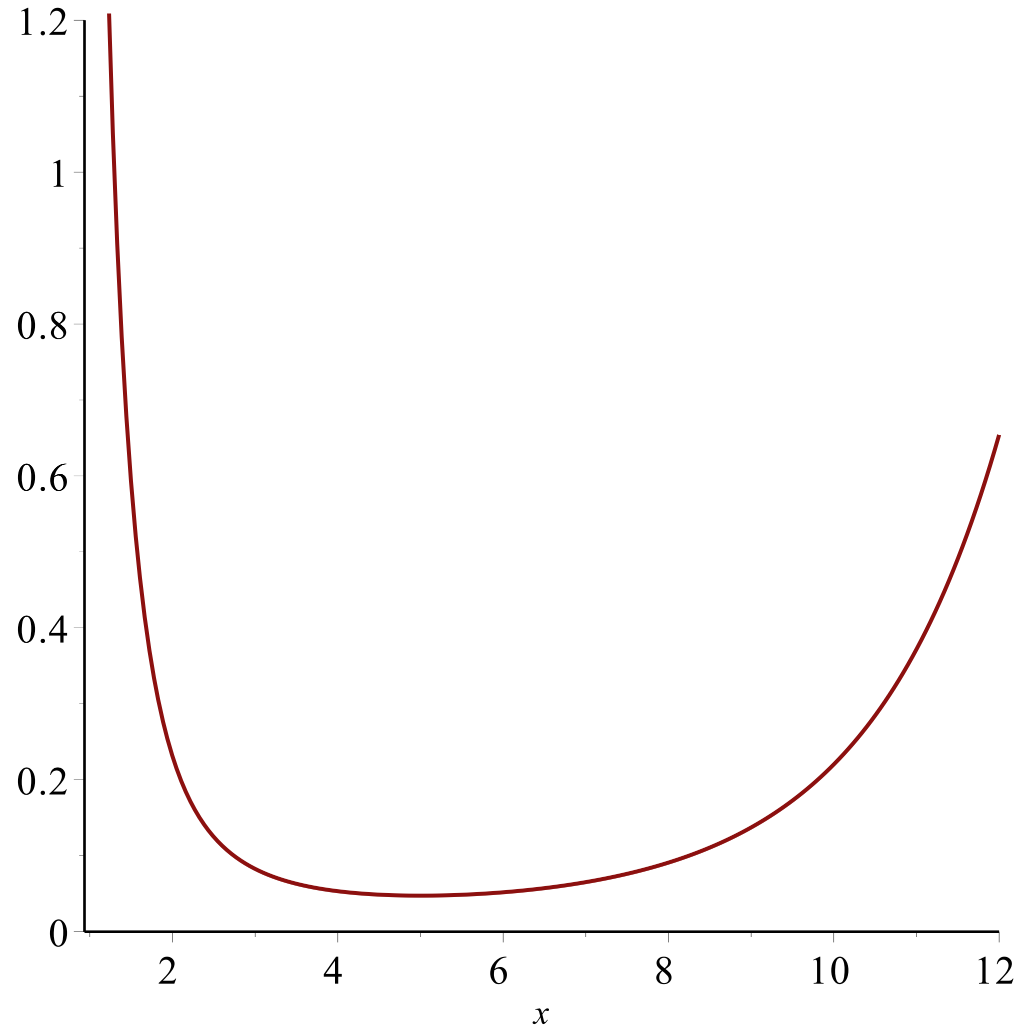
```
> plot(exp(x)/x,x=1..5);
```



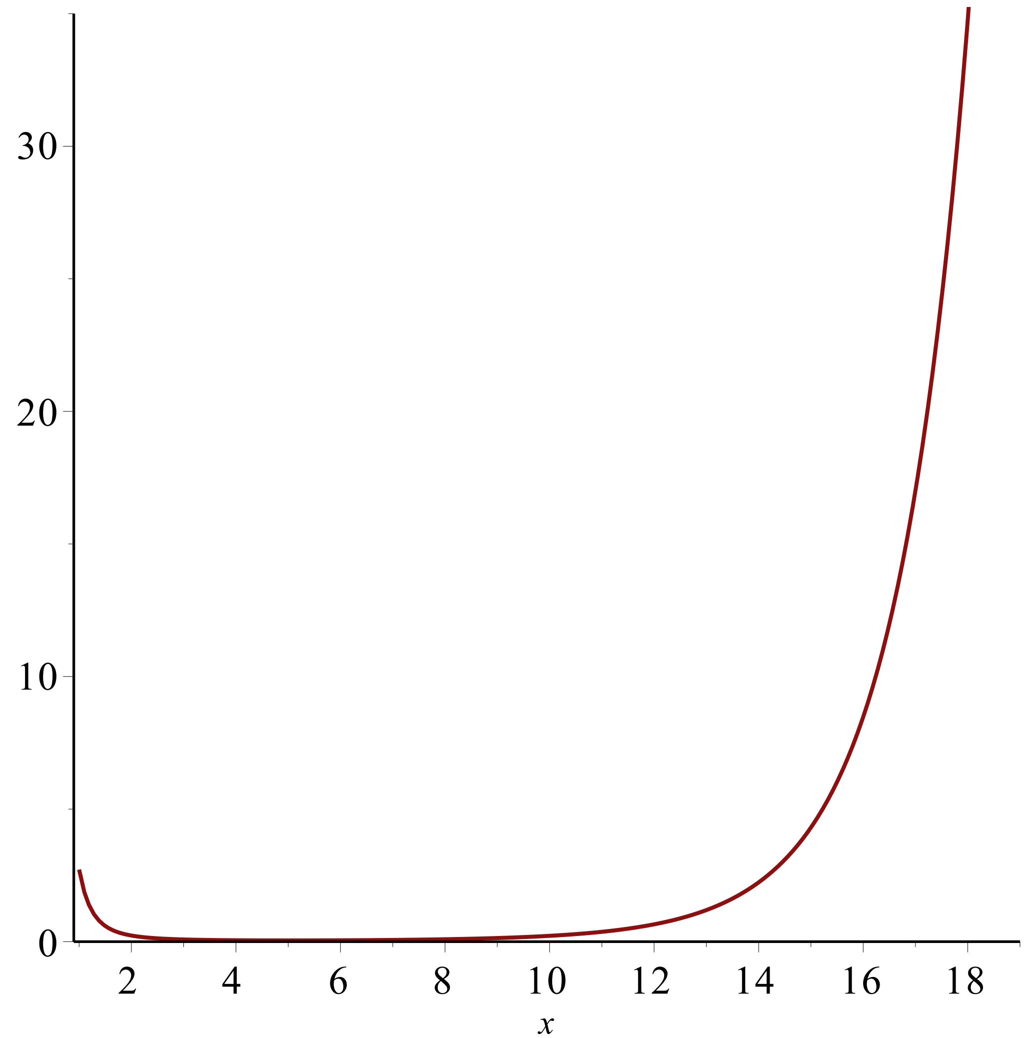

```
> plot(exp(x)/x^5,x=1..5);
```




```
> plot(exp(x)/x^5,x=1..12);
```




```
> plot(exp(x)/x^5,x=1..20);
```


30
20
10
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
x

>