Integration mit Maple

Das Paket Student[Calculus1] bietet einen Tutor zum Berechnen von Integralen, insbesondere von unbestimmten Integralen (Stammfunktionen) an:

```
> with(Student[Calculus1]):
  IntTutor();
```

$$\int \sin(x)^2\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right) dx && \left[rewrite,\ \sin(x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right] \\
&= \int \frac{1}{2}\,dx + \int -\frac{\cos(2x)}{2}\,dx && [sum] \\
&= \frac{x}{2} + \int -\frac{\cos(2x)}{2}\,dx && [constant] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\left(\int \cos(2x)\,dx\right)}{2} && [constantmultiple] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\left(\int \frac{\cos(u)}{2}\,du\right)}{2} && [change,\ u = 2x,\ u] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\left(\int \cos(u)\,du\right)}{4} && [constantmultiple] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\sin(u)}{4} && [\cos] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} && [revert]
\end{aligned}$$

$$\int \sin(x)^2\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) \tag{1}$$

Wir sehen: Im Beispiel von $f(x) = \sin(x)^2$ wird ein guter Weg zum Finden der Stammfunktion aufgezeigt.

Geben wir in den Tutor die nicht elementar integrierbare Funktion $f(t) = \exp(-t^2)$ ein, so passiert nichts, er findet keine Stammfunktion:

> $IntTutor\left(e^{(-t^2)}, t\right)$

$$\int e^{-t^2}\,dt$$

$$= \int \mathrm{e}^{-t^2 \ln(e)}\,dt \qquad \left[rewrite,\ e^{-t^2} = \mathrm{e}^{-t^2 \ln(e)}\right]$$

$$\int e^{-t^2}\,dt = \int \mathrm{e}^{-t^2 \ln(e)}\,dt \tag{2}$$

MAPLE ist aber problemlos in der Lage, bestimmte Integrale dieser Funktion numerisch zu berechnen:

> $int(\exp(-t^2), t = 0..10)$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(10)\,\sqrt{\pi} \tag{3}$$

Die numerische Auswertung muessen wir noch erzwingen, entweder mit Hilfe des Befehls "evalf", oder indem wir die Grenzen des Integrals mit Dezimalpunkt angeben:

> $evalf(\%)$

$$0.8862269255 \tag{4}$$

> $int(\exp(-t^2), t = 0.0..10.0)$

$$0.8862269255 \tag{5}$$

Bei manchen elementar integrierbaren Funktionen gibt der Tutor einen moeglichen Weg an, findet aber nicht den einfachsten (siehe hierzu die einfachere Behandlung des gleichen Beispiels in der Vorlesung):

> $IntTutor(3 \cdot r \cdot sqrt(3 \cdot r^2 + 4), r = 0..2)$

$$\int_0^2 3\,r\,\sqrt{3\,r^2+4}\,\mathrm{d}r$$

$$= 3\left(\int_0^2 r\,\sqrt{3\,r^2+4}\,\mathrm{d}r\right) \qquad [constantmultiple]$$

$$= 3\left(\int_{\sqrt{4}}^{\sqrt{16}} \frac{u^2}{3}\,\mathrm{d}u\right) \qquad [change,\, 3\,r^2+4 = u^2,\, u]$$

$$= \int_{\sqrt{4}}^{\sqrt{16}} u^2\,\mathrm{d}u \qquad [constantmultiple]$$

$$= \frac{16\,\sqrt{16}}{3} - \frac{4\,\sqrt{4}}{3} \qquad [power]$$

$$\int_0^2 3\,r\,\sqrt{3\,r^2+4}\,\mathrm{d}r = \frac{16}{3}\,\sqrt{16} - \frac{4}{3}\,\sqrt{4} \tag{6}$$

> $IntTutor(sqrt(1 - x^2), x = -1..1)$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{-x^2+1}\, dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin(u)^2+1\right) du \qquad [change, x = \sin(u), u]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin(u)^2\, du + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, du \qquad [sum]$$

$$= -\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^2\, du\right) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, du \qquad [constantmultiple]$$

$$= -\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\,u)}{2}\right) du\right) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, du \qquad \left[rewrite, \sin(u)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\,u)}{2}\right]$$

$$= -\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, du\right) - \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos(2\,u)}{2}\, du\right) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, du \qquad [sum]$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos(2\,u)}{2}\, du\right) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, du \qquad [constant]$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,u)\, du\right)}{2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, du \qquad [constantmultiple]$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(u1)}{2}\, du1\right)}{2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, du \qquad [change, u1 = 2\,u, u1]$$

$$\left(\int^{\pi} \cos(u1)\, du1\right) \qquad \pi$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{-x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\pi \qquad \textbf{(7)}$$

Wir verlassen den Tutor und benutzen das Kommando int(), um in einigen komplizierten Beispielen Stammfunktionen zu berechnen. Die Beispiele erzeugen wir dadurch, dass wir eine einigermassen kompliziert aussehende Funktion zunaechst ableiten und dann MAPLE die uns ja bereits bekannte Stammfunktion der Ableitung suchen lassen:

> *diff(tan(ln(1 + x^2)), x)*

$$\frac{2x\left(1+\tan\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^2\right)}{x^2+1} \qquad \textbf{(8)}$$

> *simplify(%)*

$$\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^2} \qquad \textbf{(9)}$$

> *int(%, x)*

$$\frac{\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)}{\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)} \qquad \textbf{(10)}$$

> *diff(exp(cos(sqrt(1 − x^2))), x)*

$$\frac{x\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}}{\sqrt{-x^2+1}} \qquad \textbf{(11)}$$

> *simplify(%)*

$$\frac{x\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}}{\sqrt{-x^2+1}} \qquad \textbf{(12)}$$

> *int(%, x)*

$$e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)} \qquad \textbf{(13)}$$

Wir treiben das noch ein bisschen weiter und leiten unsere Beispielfunktion $e^{\cos\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$ zweimal ab:

> *diff(exp(cos(sqrt(1 − x^2))), x)*

$$\frac{x\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}}{\sqrt{-x^2+1}} \qquad \textbf{(14)}$$

> *diff(%, x)*

$$\frac{x^2\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}}{\left(-x^2+1\right)^{3/2}} + \frac{\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}}{\sqrt{-x^2+1}} - \frac{x^2\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}}{-x^2+1} + \frac{x^2\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)^2 e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}}{-x^2+1} \qquad \textbf{(15)}$$

> *simplify(%)*

$$-\frac{1}{\left(-x^2+1\right)^{3/2}}\left(\left(\sqrt{-x^2+1}\,\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)^2 x^2+x^2\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)\sqrt{-x^2+1}-\sqrt{-x^2+1}\,x^2-\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}\right) \quad \textbf{(16)}$$

Diesen relativ haesslichen Ausdruck soll MAPLE jetzt integrieren:

> $int(\%, x)$

$$\int\left(-\frac{1}{\left(-x^2+1\right)^{3/2}}\left(\left(\sqrt{-x^2+1}\,\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)^2 x^2+x^2\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)\sqrt{-x^2+1}-\sqrt{-x^2+1}\,x^2-\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}\right)\mathrm{d}x \quad \textbf{(17)}$$

Weil MAPLE die (uns bekannte) Stammfunktion $\frac{\sin\left(\sqrt{1-x^2}\right)x\,e^{\cos\left(\sqrt{1-x^2}\right)}}{\sqrt{1-x^2}}$ nicht findet, schreibt es uns einfach das unbestimmte Integral als Ausdruck hin. Das wird auch durch Anwenden von "simplify" nicht besser.

> $simplify(\%)$

$$\int\left(-\frac{1}{\left(-x^2+1\right)^{3/2}}\left(\left(\sqrt{-x^2+1}\,\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)^2 x^2+x^2\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)\sqrt{-x^2+1}-\sqrt{-x^2+1}\,x^2-\sin\left(\sqrt{-x^2+1}\right)\right)e^{\cos\left(\sqrt{-x^2+1}\right)}\right)\mathrm{d}x \quad \textbf{(18)}$$

>