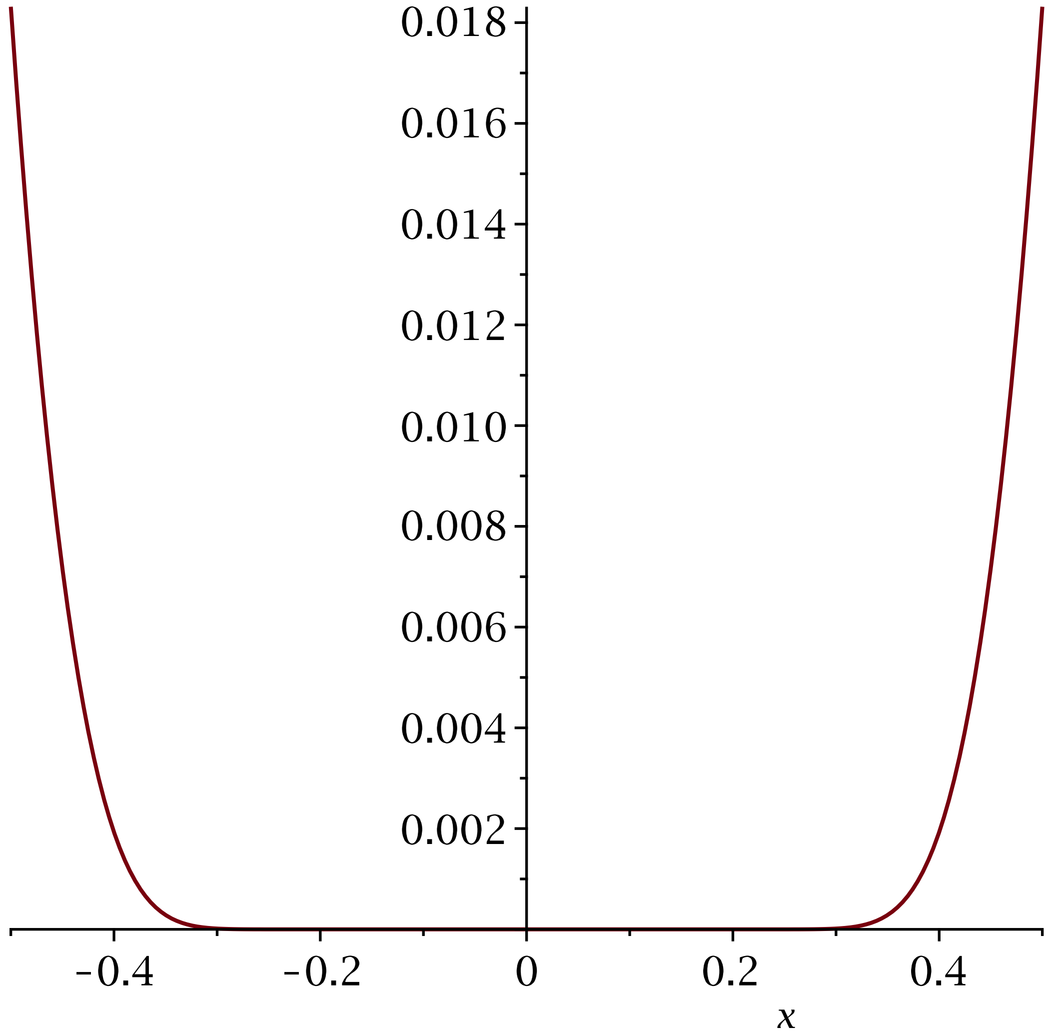
Die Taylor-Entwicklung einer Funktion

```
> with(Student[Calculus1]):
```

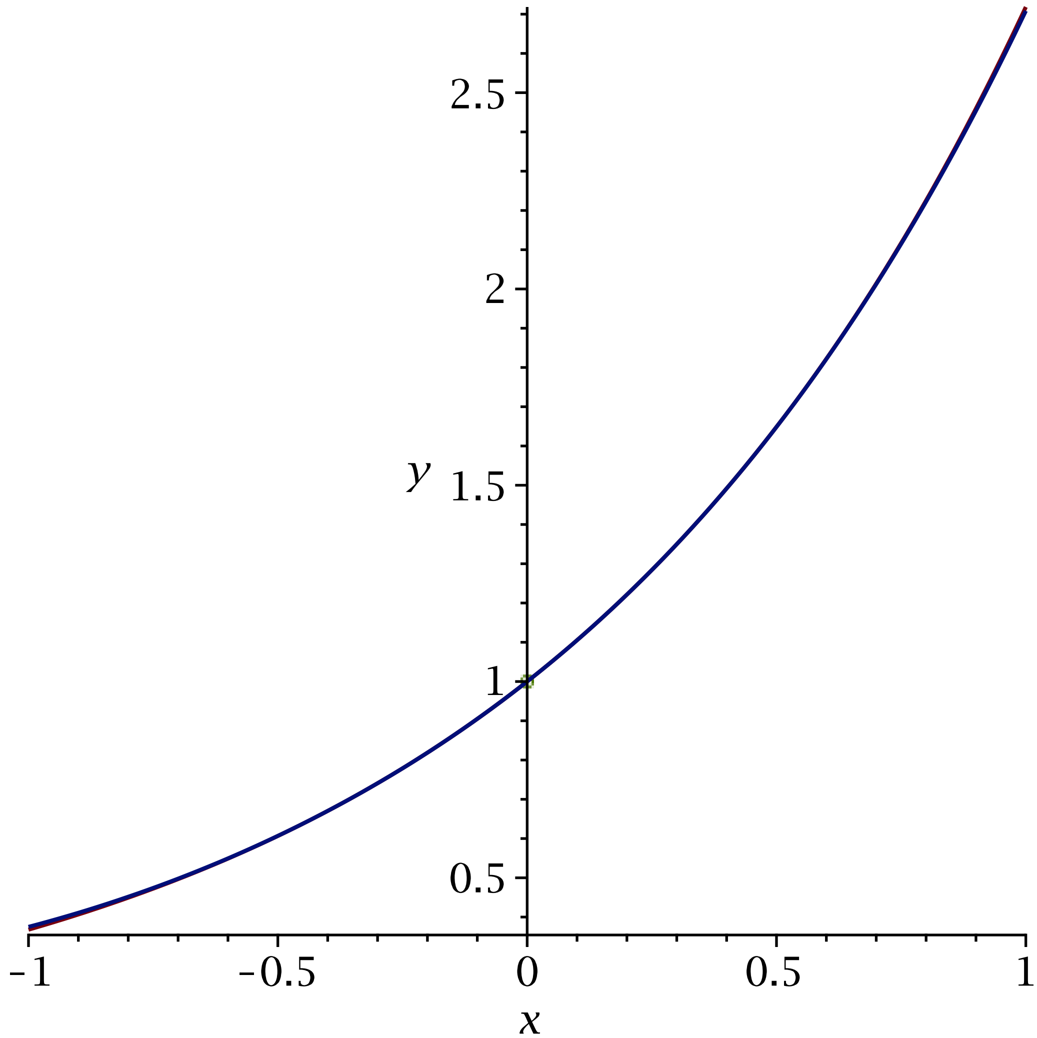
Die Funktion f, die durch $f(x) = \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$ gegeben ist, ist ein Beispiel dafür, dass die Taylorentwicklung einer Funktion nicht gegen die Funktion konvergieren muss: Die Funktion ist unendlich oft differenzierbar und alle Ableitungen haben im Punkt $x = 0$ den Wert 0, die Taylorentwicklung um den Punkt $x = 0$ ist also identisch Null, ohne dass die Funktion die Nullfunktion wäre.

```
> plot(exp(-1/x^2),x=-0.5..0.5);
```

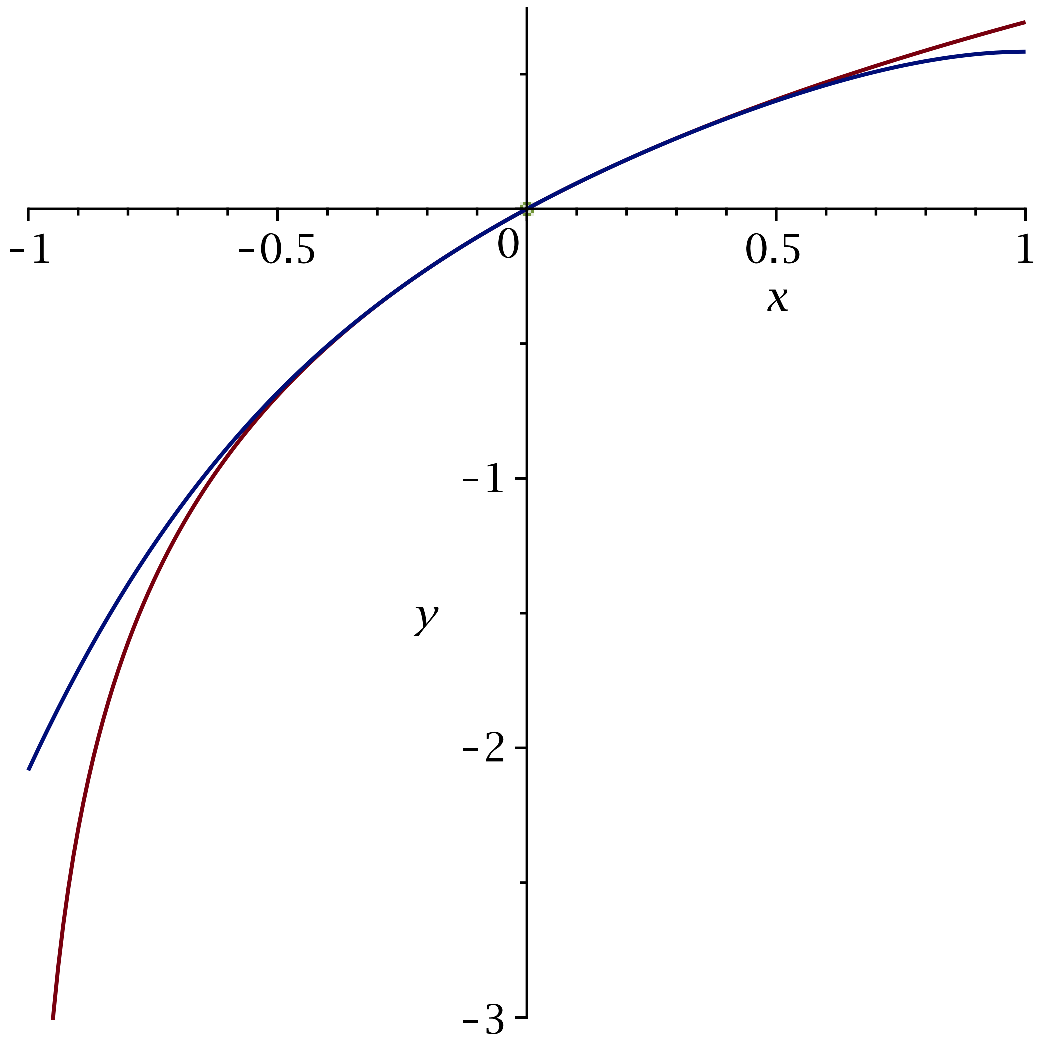


Im Folgenden werden einige Beispiel von Taylorentwicklungen mit Hilfe des MAPLE-Programms TaylorApproximationTutor aus dem "Student"-Paket betrachtet.
Das Programm erzeugt nur einen Teil des Outputs druck- bzw. speicherbar, Sie müssen also selbst experimentieren, um zu sehen, was es leistet.
Sie können die Funktion, den Entwicklungspunkt und die Ordnung der Approximation eingeben und bekommen die Terme der Entwicklung bis zur angegebenen Ordnung sowie den Graphen der Funktion und den der Approximation in einem Intervall um den Entwicklungspunkt angezeigt.

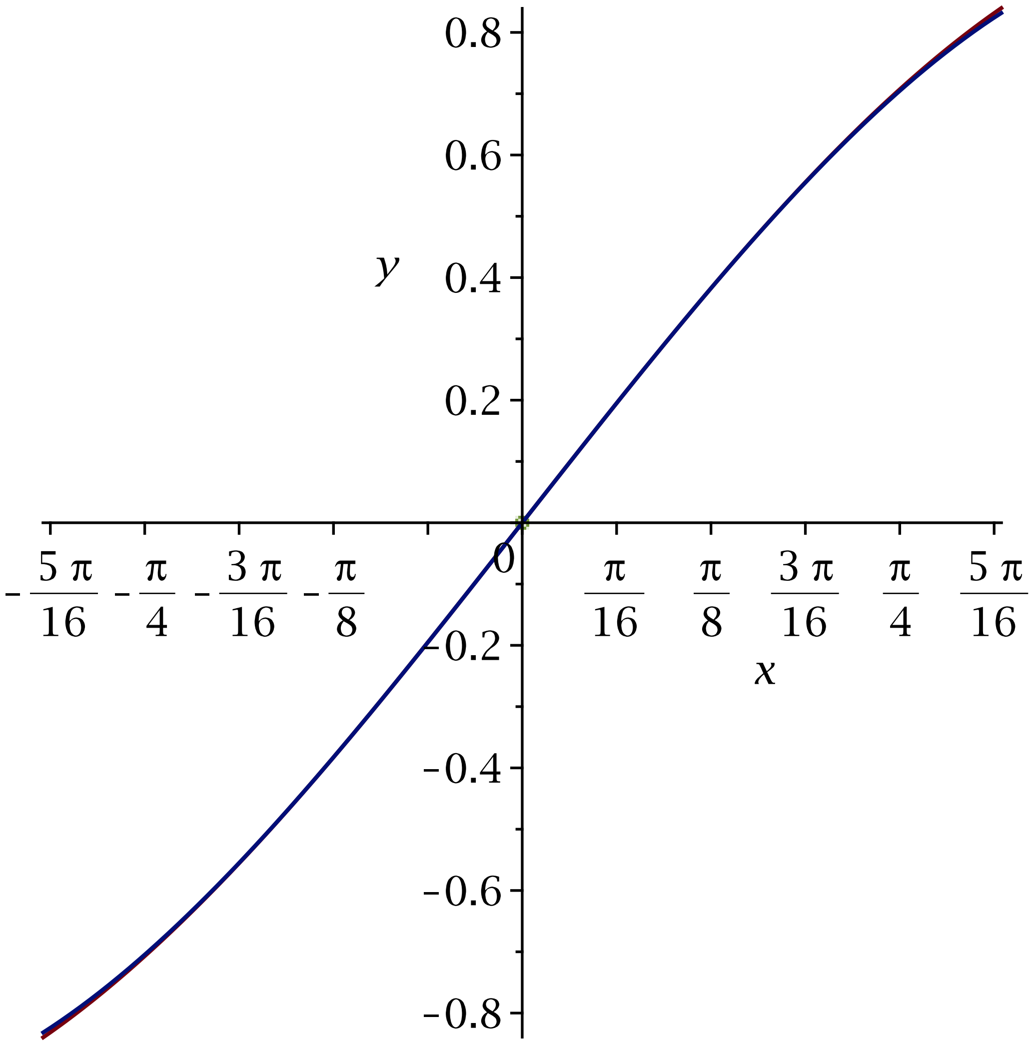
```
> TaylorApproximationTutor(exp(x),0);
```



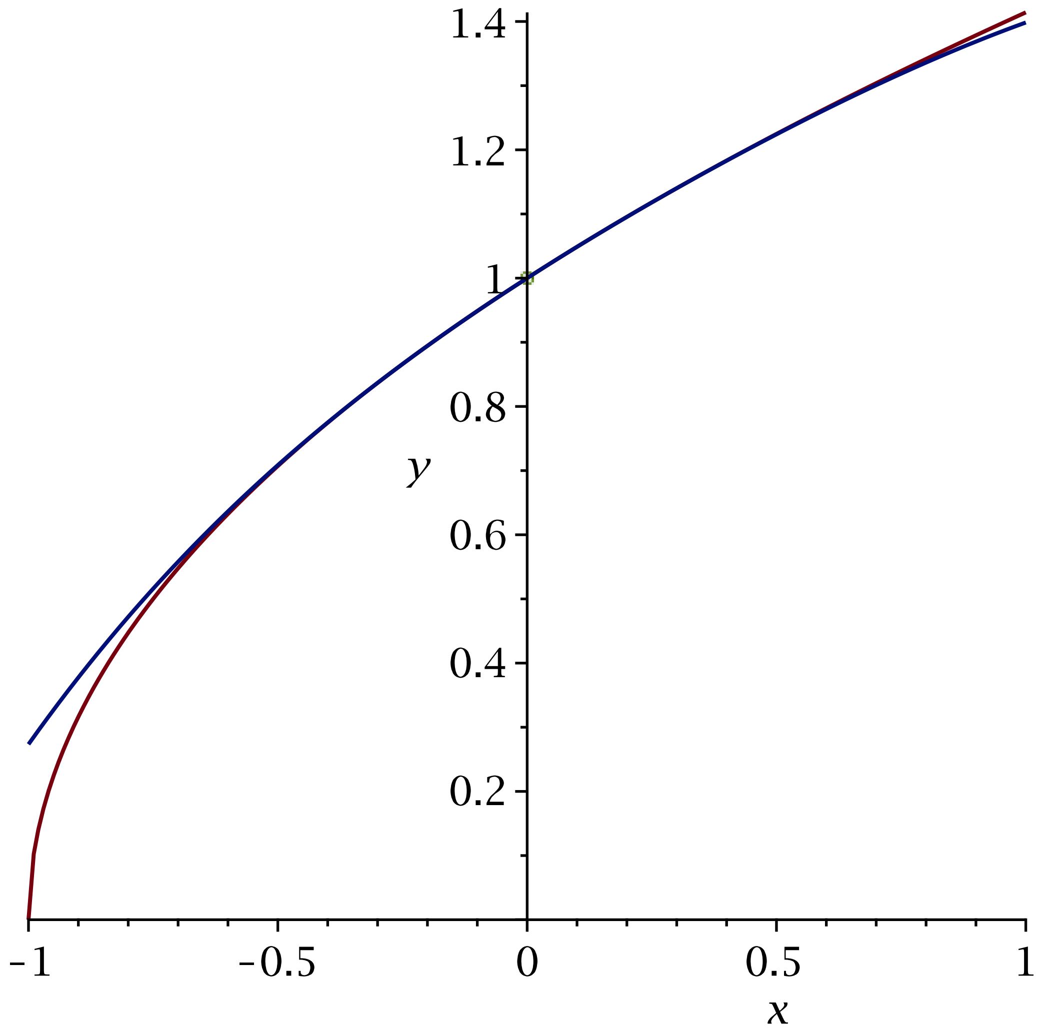

```
> TaylorApproximationTutor(log(1+x),0);
```




```
> TaylorApproximationTutor(sin(x),0);
```

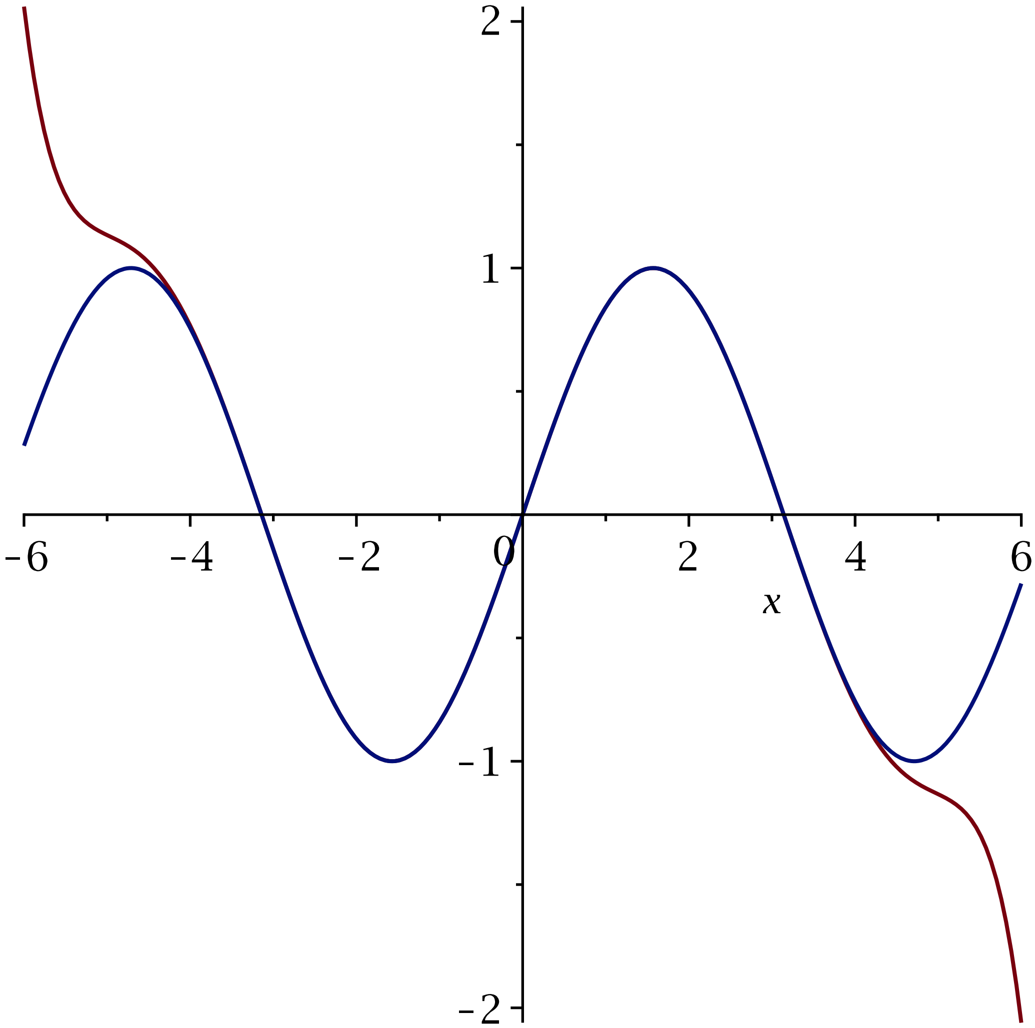



```
> TaylorApproximationTutor(sqrt(1+x),0);
```



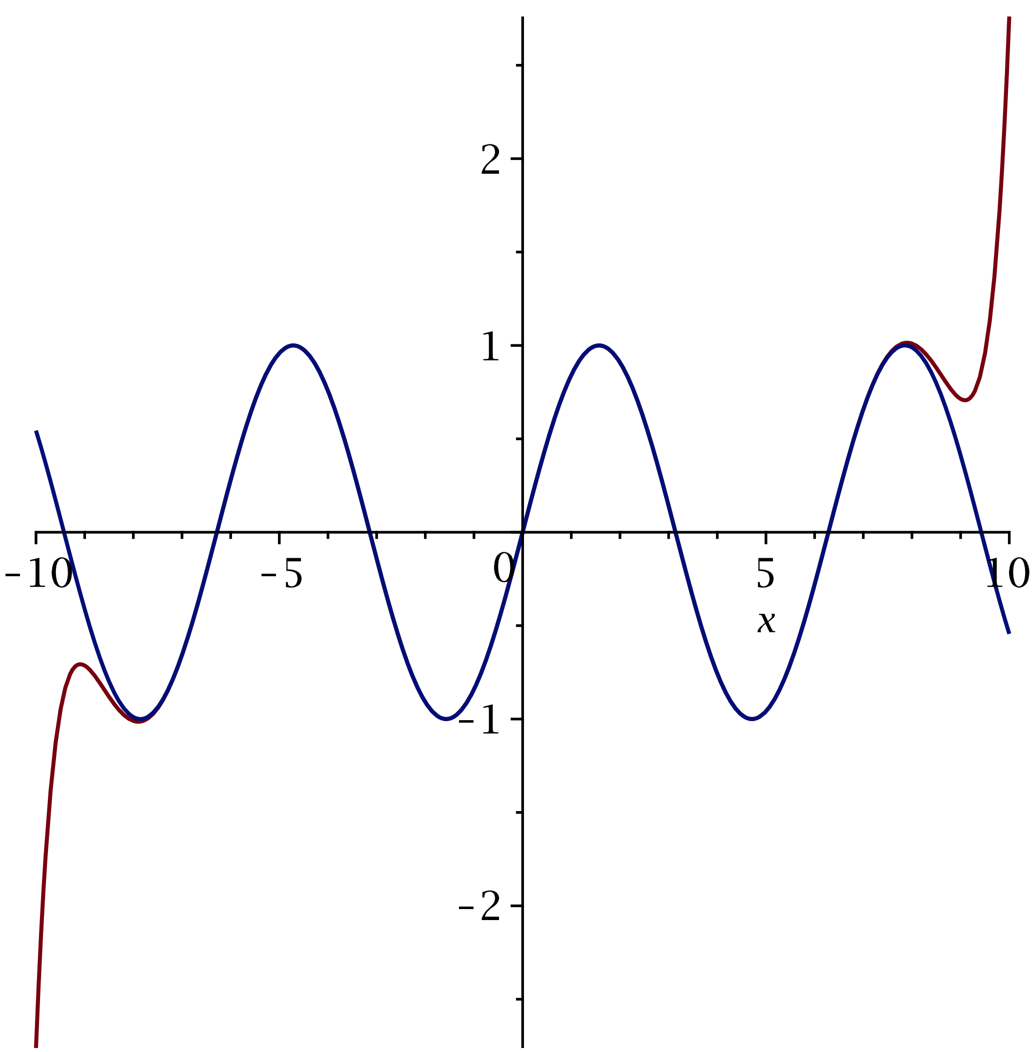
Hier ein selbst geschriebenes Kommando, das den Graphen der Funktion und den der Approximation zur vorgegebenen Ordnung am Beispile der Sinusfunktion zeichnet:

```
> plot({sin(x),sum((-1)^n*(x^(2*n+1))/(2*n+1)!,n=0..5)},x=-6..6);
```



Man sieht, dass die Approximation für die Sinusfunktion immer nur in einem Intervall um den Entwicklungspunkt eine brauchbare Approximation darstellt, dessen Länge mit der Ordnung der Approximation anwächst.

```
> plot({sin(x),sum((-1)^n*(x^(2*n+1))/(2*n+1)!,n=0..10)},x=-10..10)
  ;
```



Hier noch einmal der Anfang der Entwicklung der Sinusfunktion um 0:

```
> sum((-1)^n*(x^(2*n+1))/(2*n+1)!,n=0..5);
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} \qquad \textbf{(1)}$$

```
>
```