UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung C^*-Algebren
Wintersemester 2011/2012
Blatt 1

Aufgabe 1. Sei H ein Prä-Hilbertraum, also ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, der nicht notwendigerweise vollständig ist. Zeige, dass dann folgende Identitäten gelten:

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \forall x, y \in H$ "Parallelogrammidentität"

(b) $(x \mid y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 \quad \forall x, y \in H$ "Polarisierungsidentität"

Mit etwas Aufwand kann man übrigens zeigen, dass ein normierter Raum genau dann ein Prä-Hilbertraum ist, wenn er die Parallelogrammidentität erfüllt. Diese Identität ist also genau die Bedingung, wann eine Norm von einem Skalarprodukt induziert wird.

Aufgabe 2. Seien H_1 und H_2 Prä-Hilberträume und sei $T : H_1 \to H_2$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $d(Tx, Ty) = d(x, y) \quad \forall x, y \in H$ (die von dem Skalarprodukt induzierte Metrik)

(ii) $\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in H$ (die von dem Skalarprodukt induzierte Norm)

(iii) $(Tx \mid Ty) = (x \mid y) \quad \forall x, y \in H$

Ist eine der Bedingungen erfüllt, so heißt T *isometrisch*.

Aufgabe 3. Seien H ein Hilbertraum und $H_0, H_1 \subset H$ abgeschlossene Unterräume. Wir schreiben $H = H_0 \oplus H_1$ falls $H_0 \perp H_1$ und $H = H_0 + H_1$. Der Hilbertraum H kann also als *direkte Summe* von H_0 und H_1 geschrieben werden, dh. jedes Element $x \in H$ hat eine eindeutige Darstellung $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in H_0, x_1 \in H_1$.
Sei nun $P \in \mathcal{L}(H)$. Zeige:

(a) P ist *idempotent* (dh. $P^2 = P$) genau dann, wenn es abgeschlossene Unterräume $H_0, H_1 \subset H$ gibt mit $H_0 \cap H_1 = \{0\}$ und $H = H_0 + H_1$ und $P(x_0 + x_1) = x_0$ für alle $x_0 \in H_0, x_1 \in H_1$.

(b) P ist eine *Projektion* (dh. $P^2 = P = P^*$) genau dann, wenn zusätzlich $H_0 \perp H_1$ gilt. P ist dann die orthogonale Projektion auf H_0 und wir schreiben $H = PH \oplus (PH)^\perp$.