



Übungen zur Vorlesung C^* -Algebren
Wintersemester 2011/2012
Blatt 2

Aufgabe 1. Sei A eine unitale C^* -Algebra. Zeige folgende Aussagen über das Spektrum $\text{Sp}x$ für bestimmte Elemente $x \in A$. (Vgl. Bemerkung 3.13)

(a) Ist $x \in A$ invertierbar, so ist $\text{Sp } x^{-1} = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \text{Sp } x\}$.

(Dies gilt übrigens schon, wenn A bloß eine Algebra ist.)

(b) Ist $u \in A$ unitär (dh. $u^*u = uu^* = 1$), so ist $\text{Sp } u \subset S^1 \subset \mathbb{C}$, wobei S^1 der Einheitskreis auf $\mathbb{C}$ ist.

Zeige dafür, dass $\|u\| = \|u^*\| = 1$ und benutze (a).

(c) Ist $x \in A$ selbstadjungiert (und A nicht notwendig unital), so ist $\text{Sp}x \subset \mathbb{R}$.

Zeige dafür, dass jeder Spektralwert λ aus $\text{Sp } x$ einen Spektralwert des unitären Lifts $u := e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ induziert. Dafür ist das Element $z := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(\lambda-x)^{n-1}}{n!}$ hilfreich. Benutze schließlich (b).

Aufgabe 2. Sei A eine unitale C^* -Algebra und sei $u \in A$ unitär mit $\|1 - u\| < 2$. Zeige, dass dann ein selbstadjungiertes Element h in A existiert, so dass $e^{ih} = u$.
Hinweis: Funktionalkalkül.

Aufgabe 3. Sei A eine C^* -Algebra, $x \in A$ und sei f eine stetige Funktion auf $\text{Sp}(x^*x)$ mit $f(0) = 0$. Zeige, dass dann $f(xx^*)$ definiert ist und $xf(x^*x) = f(xx^*)x$ gilt.
Folgendes darf ohne Beweis benutzt werden:
Sei B eine Algebra, $x, y \in B$. Dann gilt $\text{Sp}(xy) \cup \{0\} = \text{Sp}(yx) \cup \{0\}$.