UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung C^*-Algebren
Wintersemester 2011/2012
Blatt 3

Aufgabe 1. Sei X ein kompakter topologischer Raum und I ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{C}(X)$. Zeige, dass I genau dann ein Ideal ist, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset X$ gibt, so dass gilt:

$$I = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f_{|F} = 0\}$$

Insofern kann I als $\mathcal{C}_0(X \backslash F)$ gesehen werden, was die Bemerkung aus Kapitel §0 erklärt: Die Ideale in $\mathcal{C}(X)$ korrespondieren zu den offenen Mengen von X.
(Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass für einen kompakten, topologischen Raum K gilt: Spec $(\mathcal{C}(K))$ ist homöomorph zu K via $\varphi_x \longleftrightarrow x$, wobei $\varphi_x(f) := f(x)$ die Auswertungsabbildung an der Stelle $x \in K$ ist.)

Aufgabe 2. Sei A eine C^*-Algebra. Wir sagen, dass A *einfach* ist, wenn A keine Ideale (außer 0 und A) besitzt. A ist also höchst nicht-kommutativ (siehe Aufgabe 1).
Zeige, dass die C^*-Algebra $M_n(\mathbb{C})$ der komplexwertigen $n \times n$-Matrizen einfach ist.

Aufgabe 3. Beantworte Tobias' Zwischenfrage vom 8.11. in allgemeinerer Form.
Seien A und B unitale C^*-Algebren, sei B einfach und sei $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver, unitaler *-Homomorphismus. Zeige, dass dann der Kern von φ ein maximales Ideal in A ist.
(Hinweis: Zeige zunächst, dass das Bild $\varphi(J)$ eines Ideals $J \lhd A$ ein Ideal in B ist.)
Eine leichte Adaption des Beweises zeigt dann: Wenn A eine kommutative Banachalgebra mit 1 ist und $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ein unitaler Algebrenhomomorphismus, dann ist der Kern von φ ein maximales Ideal in A.