UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung C^*-Algebren
Wintersemester 2011/2012
Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $\vartheta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ rational.

(a) Finde eine Darstellung von A_ϑ auf $M_q(\mathbb{C})$.

(b) Zeige, dass es unitale *-Homomorphismen $\varphi : A_\vartheta \to B$ und $\psi : A_\vartheta \to D$ gibt, so dass $\varphi(v^q) = 1$ und $\psi(v^q) \neq 1$.

(c) Folgere, dass A_ϑ nicht einfach ist.

(d) Zeige, dass u^q und v^q mit allen Elementen in A_ϑ kommutieren. Es gibt also einen *-Homomorphismus $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2) \to C^*(u^q, v^q) \subseteq A_\vartheta$. (Dieser ist sogar ein Isomorphismus.)

Aufgabe 2. Betrachte die universelle C^*-Algebra $\mathcal{E}_n := C^*(S_1, \ldots, S_n, 1 \mid S_i^* S_j = \delta_{ij} 1)$, für $n \geq 2$. Zeige, dass die folgende kurze Sequenz exakt ist:

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{E}_n \to \mathcal{O}_n \to 0$$

Hinweis: Zeige, dass $1 - \sum_{i=1}^n S_i S_i^* \in \mathcal{E}_n$ eine Projektion ist. Erinnere dich an die Bemerkung 7.13 und daran, dass $\mathbb{N}$ in (ii) und (iii) von Beispiel 7.8 durch eine beliebige abzählbare Indexmenge ersetzt werden kann.

Aufgabe 3. Sei A eine C^*-Algebra und $\pi : A \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$ eine treue Darstellung. Dann ist $M_n(A)$ eine C^*-Algebra, bestehend aus Matrizen $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $a_{ij} \in A$ und der Norm, die von $M_n(A) \to \mathcal{L}(H \oplus \ldots \oplus H)$ kommt.
Die C^*-Algebra $M_m(\mathcal{O}_2)$ mit $m \geq 2$ wird also von Matrizen erzeugt, die S_1 bzw. S_2 als einen Eintrag haben und ansonsten nur Nullen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{O}_2$ und $M_3(\mathcal{O}_2)$ isomorph sind, da

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & S_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 S_1 & S_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die C^*-Algebra $M_3(\mathcal{O}_2)$ erzeugen.

(b)* Zeige, dass $M_m(\mathcal{O}_2)$ und $\mathcal{O}_2$ für jedes $m \geq 1$ isomorph sind.

bitte wenden

Zusatzaufgabe*. Erkläre dem Dozenten (genauer), wie die Rotationsalgebra A_ϑ mit dem Quanten-Hall-Effekt zusammenhängt.
Quellen:

- Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, Kapitel 4.6.
- Bellissard, van Elst, Schulz-Baldes, *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect*, J. Math. Phys. **35** (1994), 5373–5451.
- Gracia-Bondia, Varilly, Figueroa, *Elements of noncommutative geometry*, Kapitel 12 (Einleitung des Kapitels).
- Quellen [334] und [497] von Gracia-Bondia et al.