UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung C^*-Algebren
Wintersemester 2011/2012
Blatt 1b

Aufgabe 1. Sei H ein Hilbertraum. Auf Blatt 1 haben wir gesehen, dass sich der Operator $P \in \mathcal{L}(H)$, der auf einen Teilraum H_0 von H projeziert algebraisch durch $P^2 = P = P^*$ beschreiben lässt. Auch andere Eigenschaften von Operatoren lassen sich rein algebraisch fassen. Zeige:

(a) $U \in \mathcal{L}(H)$ ist *unitär* (dh. $U^*U = UU^* = 1$) genau dann, wenn U ein Isomorphismus von H ist, dh. U ist isometrisch und surjektiv (vgl. Def. 1.8).

(b) $V \in \mathcal{L}(H)$ ist eine *Isometrie* (dh. $V^*V = 1$) genau dann, wenn V isometrisch ist.

(c) Der einseitige Shift $S \in \mathcal{L}(H)$ ist gegeben durch $Se_n = e_{n+1}$, wobei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H ist. Zeige, dass S eine Isometrie, aber kein Unitäres ist.

(d) $V \in \mathcal{L}(H)$ ist eine *partielle Isometrie*, wenn $VV^*V = V$ gilt. Es ist äquivalent:

(i) V ist eine partielle Isometrie.

(ii) V^*V ist eine Projektion. (V^*V projeziert dann auf K aus (iv))

(ii) VV^* ist eine Projektion. (V^*V projeziert dann auf $V(K)$ aus (iv))

(iv) Es gibt einen abgeschlossenen Teilraum $K \subset H$ gibt, so dass $V : K \to H$ isometrisch ist und $V_{|K^\perp} = 0$.