

§1 Grundlagen in der Theorie von Operatoren auf Hilberträumen

1.1 Def.: Ein Hilbertraum ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum H

mit einem Skalarprodukt $(\cdot | \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left[\begin{array}{l} (\lambda x + \mu y | z) = \lambda(x | z) + \mu(y | z), \quad \overline{(x | y)} = (y | x), \quad (x | x) \geq 0, \\ (x | x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall x, y, z \in H \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \end{array} \right]$$

der bzgl. der Norm $\|x\| := \sqrt{(x | x)}$ vollständig ist.

1.2 Lemma: Es gilt Cauchy-Schwarz: $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in H$

Wobei „ $=$ “ $\Leftrightarrow x, y$ linear abhängig

„Beweis“: $0 \leq (x + \lambda y | x + \lambda y) = (x | x) - \frac{|(x | y)|^2}{(y | y)}$ mit $\lambda = -\frac{(x | y)}{(y | y)}$

„ $=$ “ $\Leftrightarrow (x + \lambda y | x + \lambda y) = 0 \Leftrightarrow x = -\lambda y$

1.3 Darstellungssatz von Riesz: Sei H ein Hilbertraum,

$H' := \{f: H \rightarrow \mathbb{C} \text{ linear, stetig}\}$ sein: Dualraum.

Dann ist $j: H \rightarrow H'$, gegeben durch $(j(y))(x) := (x | y)$

(also $j(y) = (\cdot | y)$), ein antilinearer, isometrischer Isomorphismus.

Insbesondere gilt: $\forall f \in H' \exists y \in H: f(x) = (x | y) \quad (\forall x \in H)$

„Beweis“: Zu $y \in H$ ist $f_y: H \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x | y)$ lin., stetig, $\|f_y\| = \|y\|$

Also ist j wohldefiniert und isometrisch, d.h. $\|j(y)\| = \|f_y\| = \|y\|$.

Da $(\cdot | \cdot)$ antilinear in der 2. Komponente ist, ist j antilinear.

Also ist j auch injektiv ($j(y_1) = j(y_2) \Rightarrow 0 = \|j(y_1 - y_2)\| = \|y_1 - y_2\|$)

b.z.z.: j ist surjektiv.

Zeige dazu, dass $A := \{z \in H \mid f(z) = 1\}$ abgeschlossen und kompakt

ist, für $f \in H'$. Dann existiert $w \in A$ mit $\|w\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\} = 1$

$(y_n) \in A$ mit $\|y_n\| \rightarrow \inf\{\|y\| \mid y \in A\}$ ist Cauchyfolge wegen Parallelogrammformel:
 $(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$

$\leadsto f_w(y) = f(y) \quad \forall y \in \text{Kern } f, \quad f_w(w) = f(w) \Rightarrow f = f_w$

1.4 Def.: H Hilbertraum, $x, y \in H$ orthogonal $\Leftrightarrow (x|y) = 0$

Schreibe dann $x \perp y$.

$M \subseteq H$. Dann ist $M^\perp := \{x \in H \mid x \perp y \ \forall y \in M\}$ orthogonales

komplement von M .

1.5 Lemma (Satz von Pythagoras): H Hilbertraum, $x \perp y$.

$$\text{Dann } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$[\text{Beweis: } \|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = \|x\|^2 + \underbrace{(x|y)}_{=0} + \underbrace{(y|x)}_{=0} + \|y\|^2$$

1.6 Satz: H Hilbertraum. Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in H , d.h. $(e_i|e_j) = \delta_{ij} \ \forall i, j \in I$.

Dann ist äquivalent:

$$(i) \ \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x|e_i)|^2 \quad \forall x \in H \quad (\text{"Parsevalsche Gleichung"})$$

$$(ii) \ x = \sum_{i \in I} (x|e_i) e_i \quad \forall x \in H$$

(iii) $\text{Span}\{e_i \mid i \in I\} \subseteq H$ dicht (der von $(e_i)_{i \in I}$ erzeugte lineare Unterraum)

$$(iv) \ z \in H, z \perp e_i \ \forall i \in I \Rightarrow z = 0$$

(v) $(e_i)_{i \in I}$ ist eine maximale orthonormale Familie.

$(e_i)_{i \in I}$ heißt Orthonormalbasis, falls eine der

äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

"Beweis": (i) $\Rightarrow$ (ii): $F \subseteq I$ endl., $s_F := \sum_{i \in F} (x|e_i) e_i$. Dann $x - s_F \perp s_F$.

$$\text{Dann } \|x\|^2 \stackrel{1.5}{=} \|x - s_F\|^2 + \|s_F\|^2 \stackrel{1.5}{=} \|x - s_F\|^2 + \sum_{i \in F} |(x|e_i)|^2 \xrightarrow[F]{\quad} \|x\|^2 \Rightarrow \|x - s_F\|^2 \xrightarrow[F]{\quad} 0$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Jedes $x \in H$ kann per $\sum (x|e_i) e_i$ angenähert werden.

$$(iii) \Rightarrow (iv): z = \sum (z|e_i) e_i = 0.$$

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Wäre $(e_i)_{i \in I}$ nicht maximal, so gäbe es einen Vektor $z \in H$ mit $z \perp e_i \ \forall i \in I$.

$$(iv) \Rightarrow (ii): (x - \sum_{i \in I} (x|e_i) e_i) \perp e_j \ \forall j \in I$$

$$\perp (ii) \Rightarrow (i): \|x\|^2 \stackrel{1.5}{=} \|x - s_F\|^2 + \|s_F\|^2 \xrightarrow[F]{\quad} \|x\|^2$$

1.7 Bemerkung: Die Kardinalität einer ONB in einem Hilbertraum ist endlich. Ist sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, so heißt der Hilbertraum separabel. Das ist äquivalent dazu, dass der Raum eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

1.8 Definition: Seien H und K Hilberträume. Ein Isomorphismus $U: H \rightarrow K$ ist eine lineare Abbildung, so dass U surjektiv und isometrisch (d.h. $(Ux|Uy)_K = (x|y)_H \quad \forall x, y \in H$) ist.

(U ist also auch injektiv: $Ux=0 \Rightarrow 0=(Ux|Ux)=(x|x) \Rightarrow x=0$
und $Ux=Uy \Rightarrow U(x-y)=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$)

1.9 Satz: H, K Hilberträume, $A: H \rightarrow K$ linear. Dann sind äq.:

(i) A ist stetig

(ii) A ist stetig in 0

(iii) $\exists C > 0: \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in H$, d.h. A ist beschränkt

Ist eine der Bedingungen erfüllt, so heißt A beschränkter Operator.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $\checkmark$ (ii) $\Rightarrow$ (iii): Zu $\varepsilon = 1$ ex. $\delta > 0$ mit

$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax\| \leq 1$ (denn $A0=0$). $C := \frac{1}{\delta} > 0$

Dann $\|Ax\| = \delta \|x\| \cdot \|A \frac{x}{\|x\|}\| \leq \delta \|x\| = C\|x\|$.

$\perp$ (iii) $\Rightarrow$ (i): $x_n \rightarrow x$. Dann $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \rightarrow 0$

1.10 Def.: Sei $A: H \rightarrow K$ stetig, linear zwischen Hilberträumen.

$\|A\| := \inf \{ C \mid \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in H \}$ „Operatornorm“

1.11 Def.: H Hilbertraum. $\mathcal{L}(H) := \{ A: H \rightarrow H \text{ linear, stetig} \}$

H, K Hilberträume. $\mathcal{L}(H, K) := \{ A: H \rightarrow K \text{ linear, stetig} \}$

(englische Literatur: $\mathcal{B}(H), \mathcal{B}(H, K)$, „bounded“)

1.12 Prop.: Seien $A, B \in \mathcal{L}(H, K)$. Es gilt:

$$(i) \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in H$$

$$(ii) \|A\| = \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| = 1 \}$$

$$(iii) \|A\| = \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| \leq 1 \}$$

$$(iv) \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{hierbei ist } AB := A \circ B \text{ Komposition})$$

Beweis: (i) Sei $c_n \searrow \|A\|$. Dann $\|Ax\| \leq c_n \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x$

(ii) $\alpha := \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| = 1 \} \leq \|A\|$ nach (i). Andererseits ist

$$\|Ax\| = \|x\| \|A \frac{x}{\|x\|}\| \leq \|x\| \alpha \Rightarrow \|A\| \leq \alpha.$$

(iii) Sei $0 \leq \|x\| \leq 1$. Dann $\|Ax\| \leq \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| = \|A \frac{x}{\|x\|}\| \leq \|A\|$ nach (i)

$$\text{Somit } \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| \leq 1 \} \leq \|A\| \stackrel{(ii)}{=} \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| = 1 \} \leq \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| \leq 1 \}$$

(iv) Sei $x \in H$ mit $\|x\| = 1$. Dann $\|(AB)x\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\|$, dann $\sup$.

1.13 Bemerkung: $\mathcal{L}(H)$ ist ein normierter, vollständiger Raum mit der Operatornorm und den Vektorraumoperationen $(A+B)(x) := Ax + Bx$, $(\lambda A)(x) := \lambda Ax$. $\mathcal{L}(H)$ ist sogar eine Algebra mit $(A \cdot B)x := A(Bx)$.

1.14 Bemerkung: $\mathcal{L}(H)$ ist abgeschlossen unter Umkehrabbildungen, d.h.

$$A \in \mathcal{L}(H, K) \text{ bijektiv} \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(K, H)$$

Beweis: A^{-1} ist linear $(A^{-1}(x+y) = A^{-1}(Ax_0 + Ay_0) = A^{-1}(A(x_0 + y_0)) = x_0 + y_0 = A^{-1}x + A^{-1}y)$

Sehr skizzenhaft $\nearrow$ bzi. A^{-1} ist stetig.

Dies folgt ^{direkt} aus dem Satz von der offenen Abbildung:

" $T: E \rightarrow F$ stetig, lin., surj., E, F vollst., metr. VRen mit transl., metr. Metrik
 $\Rightarrow T$ ist offen, d.h. $\forall U \subseteq E$ offen ist $TU \subseteq F$ offen"

Idee beim Satz von der off. Abb.: $U \subseteq E$ offen, $Tx \in TU \subseteq F$. Dann ex. $\varepsilon, \eta > 0$ mit $E_{2\varepsilon} := \{x \in E \mid d(0, x) < 2\varepsilon\}$ und $x + E_{2\varepsilon} \subseteq U$, so dass $F_\eta := \{y \in F \mid d(0, y) < \eta\} \subseteq TE_{2\varepsilon}$.

Demnach nach dem Satz von Baire enthält $\overline{TE_\varepsilon}$ eine offene Kugel, da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} TE_n = T(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = TE = F$.

(Baire: " X vollst., metr. Raum, $M_n \subseteq X$ abgeschl., $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \Rightarrow \exists n_0 \exists U \neq \emptyset$ offen: $U \subseteq M_{n_0}$ ")

III $\leadsto$ finde η_{20} mit $F_\eta \subseteq \overline{TE_\varepsilon} \leadsto F_\eta \subseteq TE_{2\varepsilon}$.

Dann ist also $y + F_\eta \subseteq T(x + E_{2\varepsilon}) \subseteq TU$ und somit TU offen.

1.15 Prop.: $A \in \mathcal{L}(H, K) \Rightarrow \exists! A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ mit
 $(x | A^* y)_H = (Ax | y)_K$

Beweis: Sei $y \in K$. Dann ist $g: H \rightarrow \mathbb{C}, g(x) := (Ax | y)_K$ stetig, linear.
 Nach Satz 1.3 ex. also $z \in H$ mit $(Ax | y)_K = g(x) = (x | z)_H$.

Setze $A^* y := z$ (z ist eindeutig)

$$A^* \text{ lin. : } (x | A^*(\lambda y_1 + \mu y_2)) = (Ax | \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda (Ax | y_1) + \mu (Ax | y_2) \\ = (x | \lambda A^* y_1 + \mu A^* y_2)$$

$$A^* \text{ beschränkt: } \|A^* x\|^2 = (A^* x | A^* x) = (AA^* x | x) \stackrel{C.S.}{\leq} \|AA^* x\| \|x\| \stackrel{1.12}{\leq} \|A\| \|A^* x\| \|x\| \\ \Rightarrow \|A^* x\| \leq \|A\| \|x\| \stackrel{1.10}{\Rightarrow} \|A^*\| \leq \|A\|$$

L

1.16 Prop.: Die Abbildung $^*: \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ ist antilinear

(d.h. $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$), normerhaltend (d.h. $\|A^*\| = \|A\|$),
 involutiv (d.h. $A^{**} = A$) und erfüllt $(AB)^* = B^* A^*$ sowie $\|A^* A\| = \|A\|^2$

Beweis: antilinear: $(x | (\lambda A + \mu B)^* y) = ((\lambda A + \mu B)x | y) = \lambda (Ax | y) + \mu (Bx | y) = (x | \bar{\lambda} A^* y + \bar{\mu} B^* y)$

normerhaltend: $\|A^*\| \leq \|A\|$ nach Beweis von 1.15, $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$

involutiv: $(A^* x | y) = (x | A^* y) = (Ax | y) \quad \forall x, y \Rightarrow A^{**} = A$

$[(Ax | y) = (Bx | y) \quad \forall x, y \Rightarrow \|(A-B)x\|^2 = (A-B)x | (A-B)x = 0 \quad \forall x \Rightarrow A=B]$

$(AB)^* = B^* A^*$: $(x | (AB)^* y) = (ABx | y) = (Bx | A^* y) = (x | B^* A^* y) \quad \forall x, y$

$\|A^* A\| = \|A\|^2$: $\|Ax\|^2 = (Ax | Ax) = (A^* Ax | x) \stackrel{C.S.}{\leq} \|A^* A\| \|x\|^2 = \|A^* A\| \quad \text{für } \|x\|=1 \\ \stackrel{1.12}{\Rightarrow} \|A\|^2 \leq \|A^* A\| \stackrel{1.12}{\leq} \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$

L

1.17 Prop.: Für $A \in \mathcal{L}(H)$ gilt $\text{Ker } A = (\text{Bnd } A^*)^\perp$, $(\text{Ker } A)^\perp = \overline{\text{Bnd } A^*}$

Beweis: i) $x \in (\text{Bnd } A^*)^\perp \Leftrightarrow (x | A^* y) = 0 \quad \forall y \Leftrightarrow (Ax | y) = 0 \quad \forall y \\ \Leftrightarrow Ax = 0$

ii) Sei $K \subseteq H$ Teilraum. Dann ist $K^{\perp\perp} = \bar{K}$.

Satz $\rightarrow \bar{K} \subseteq H$ abgeschlossener Teilraum. Also gilt $\bar{K} \cap \bar{K}^\perp = \{0\}$, $\bar{K} + \bar{K}^\perp = H$. ([...])

Schreibe dann $H = \bar{K} \oplus \bar{K}^\perp$. Andererseits gilt $H = K^{\perp\perp} \oplus K^\perp$

$\perp$ und $K^\perp = \bar{K}^\perp$. So ist $\bar{K} = K^{\perp\perp}$.

L

1.18 Bemerkung: $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert (d.h. $A^* = A$).

Dann gilt $(Ax|x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$ und $\|A\| = \sup \{ |(Ax|x)| \mid \|x\|=1 \}$.

„Beweis“: i) $\overline{(Ax|x)} = (x|Ax) = (Ax|x)$, also $(Ax|x) \in \mathbb{R}$.

ii) $|(Ax|x)| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|Ax\| \|x\| \leq \|A\|$ für $\|x\|=1 \Rightarrow \sup \{ |(Ax|x)| \mid \|x\|=1 \} \leq \|A\|$.

Für „ $\geq$ “ zeige mit Hilfe der „Parallelogrammidentität“ und der „Polarisierungsidentität“ (tichte Zusammenhänge von Norm und Skalarprodukt in H -Abstraktion), dass $|(Ax|y)| \leq s \quad \forall x, y \in H, \|x\|=\|y\|=1$.

Dann gilt $\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = \|Ax\| |(Ax|\frac{Ax}{\|Ax\|})| \leq \|Ax\| \cdot s \in \|A\| \cdot s$ für $\|x\|=1$.

Also $\|A\|^2 \leq \|A\| \cdot s$, d.h. $\|A\| \leq s$.

1.19 Definition: $A \in \mathcal{L}(H)$. A heißt kompakt, falls eine der

äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) $M \subseteq H$ beschränkte Teilmenge $\Rightarrow \overline{AM}$ kompakt

(ii) $\overline{AB(0,1)}$ ist kompakt

(iii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folge in $H \Rightarrow (Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält konv. Teilfolge

Setze $\mathcal{K}(H) := \{ A \in \mathcal{L}(H) \mid A \text{ kompakt} \} \subseteq \mathcal{L}(H)$

1.20 Prop.: $\mathcal{K}(H)$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{L}(H)$,

d.h. $\mathcal{K}(H)$ ist ein abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathcal{L}(H)$

mit der Eigenschaft $AB, BA \in \mathcal{K}(H) \quad \forall A \in \mathcal{K}(H), B \in \mathcal{L}(H)$.

„Beweis“: lin. TR: $A, B \in \mathcal{K}(H), M \subseteq H$ beschränkt $\Rightarrow \overline{(A+B)(M)} \subseteq \underbrace{\overline{AM} + \overline{BM}}_{\text{Kompakt}}$

abgeschl.: Nach dem Satz von Borel-Lebesgue ist eine abgeschlossene Menge in einem vollständigen, metrischen Raum kompakt genau dann, wenn sie zu jedem $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen Kugeln dieses Radius überdeckt werden kann.

Sei nun $A \in \overline{K(H)}$ und $C \in K(H)$ mit $\|A - C\| \leq \varepsilon$ zu $\varepsilon > 0$.

Dann ist $\overline{CB(0,1)}$ kompakt, also $\overline{CB(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Dann aber, $\overline{AB(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon) + \underbrace{(A-C)\overline{B(0,1)}}_{\subseteq B(0, \varepsilon)}$,

dh. $\overline{AB(0,1)}$ kompakt, also $A \in K(H)$.

$AB, BA \in K(H)$: $M \subseteq H$ beschränkt. Dann $\overline{AB(M)}$ kompakt.

$\hookrightarrow$ Ebenso $BA(M) \subseteq \overline{B(\overline{A(M)})}$, also $\overline{B(\overline{A(M)})}$ kompakt $\Rightarrow \overline{BA(M)}$ kompakt.

1.2.1 Bemerkung: $A \in K(H) \Rightarrow A^* \in K(H)$.

["Beweis": direkt möglich oder, als Folgerung aus Kap. 5.

1.2.2 Bemerkung: $\overset{H \text{ separabel.}}{K}$ ompakte Operatoren sind "klein", denn es gilt:

$A \in K(H) \Leftrightarrow \exists A_n \in \mathcal{I}(H)$ mit $\text{Bild } A_n$ endlich-dimensional,
so dass $A_n \rightarrow A$ (in Operatornorm)

["Beweis": " $\Leftarrow$ ": Jedes dieser $A_n \in \mathcal{I}(H)$ ist kompakt, da $\overline{A_n B(0,1)}$ beschränkt und abgeschlossen und endlich-dimensional, nach Heine-Borel also kompakt. $K(H)$ ist abgeschlossen.

" $\Rightarrow$ ": Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ONB von H und $P_n: H \rightarrow \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$ die Projektion auf das lineare Erzeugnis von $e_1, \dots, e_n$.

$\hookrightarrow$ Dann ist $A_n := P_n A$ endlich-dimensional und $A_n \rightarrow A$ ([1.1.3])