

§ 2 Banachalgebren und ihr Spektrum

2-1

C^* -Algebren sind eine spezielle Klasse von Banachalgebren. Insofern nehmen wir uns ihnen in diesem Kapitel auf abstraktem Weg, nachdem §1 eine „konkrete“ Grundlage für unsere Anschauung bereitstellt.

2.1 Def.: Eine Algebra A über $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum mit bilinear, assoziativer Multiplikation, so dass $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ $\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Eine normierte Algebra A ist eine Algebra (über $\mathbb{C}$), die ein normierter Vektorraum $\rightarrow \|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in A$ ist.

Eine Banachalgebra ist eine vollständige, normierte Algebra.

2.2 Bemerkung: Die Multiplikation ist in einer normierten Algebra stetig.

2.3 Bsp.: • X kompakter, topologischer Raum $\Rightarrow \mathcal{C}(X)$ Banachalgebra
 $\rightarrow$ punktweisen Operationen und $\|\cdot\|_\infty$

• X Menge $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ beschränkt}\}$ Banachalgebra
 $\rightarrow$ punktweisen Operationen und $\|\cdot\|_\infty$

• H Hilbertraum $\Rightarrow \mathcal{L}(H)$ Banachalgebra $\rightarrow$ Operatornorm
(vgl. 1.12, 1.13)

2.4 Prop.: Sei A Banachalgebra mit 1 . Dann gilt:

a) $x \in A, \|1-x\| < 1 \Rightarrow x$ invertierbar (mit $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$)

b) $x \in A$ invertierbar, $y \in A, \|x-y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|} \Rightarrow y$ invertierbar

c) $GL(A) := \{x \in A \mid x \text{ invertierbar}\}$ offen, $GL(A) \rightarrow GL(A)$ stetig
 $x \mapsto x^{-1}$

Beweis: a) $z := 1 - x$. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist absolut konvergent ($\sum \|z^n\| \leq \sum \|z\|^n < \infty$)
 da $\|z\| < 1$
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist konvergent ($\|\sum_{n=0}^k z^n - \sum_{n=0}^l z^n\| = \|\sum_{n=k+1}^l z^n\| \leq \sum_{n=k+1}^l \|z^n\| \leq \sum_{n=k+1}^l \|z\|^n < \varepsilon$ für $l > k > N$)
 $\Rightarrow (\sum_{n=0}^k z^n)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge

Dann $(1-z) \sum_{n=0}^k z^n = 1 - z^{k+1} \rightarrow 1, k \rightarrow \infty \Rightarrow x \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) x = 1$

b) $\|1 - yx^{-1}\| = \|(x - y)x^{-1}\| \leq \|x - y\| \|x^{-1}\| < 1 \Rightarrow yx^{-1}$ invertierbar,
 d.h. $\exists z \in A$ mit $(yx^{-1})z = 1$. Dann $y(x^{-1}z) = 1$, also y invertierbar.

c) $GL(A)$ offen nach b). Stetigkeit der Inversion:

Sei $y_n \rightarrow x$ in $GL(A)$. Dann ist für n groß: $\|1 - y_n x^{-1}\| < 1$

Nach a) also $x y_n^{-1} = (y_n x^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - y_n x^{-1})^k$. Somit:

$$\|x^{-1} - y_n^{-1}\| = \|x^{-1}(1 - x y_n^{-1})\| = \|x^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - y_n x^{-1})^k\| \leq \|x^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\|1 - y_n x^{-1}\|^k}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty}$$

2.5 Def: A Banachalgebra mit $1, x \in A$. Das Spektrum von x
 ist definiert als $\text{Sp } x := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - x \text{ nicht invertierbar}\}$

2.6 Bemerkung: a) Ist $A = M_n(\mathbb{C}) (= \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$, so ist $\text{Sp } x = \{\text{Eigenwerte von } x\}$.

2.7 Prop: $\text{Sp } x$ ist abgeschlossen und beschränkt durch

$$\text{Sp } x \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}. \text{ Insbesondere ist } \text{Sp } x \text{ also kompakt.}$$

Beweis: $\mathbb{C} \setminus \text{Sp } x = f^{-1}(GL(A))$ unter $f: \mathbb{C} \rightarrow A$ stetig, 2.4c.

$\lambda \mapsto \lambda 1 - x$
 $\hookrightarrow |\lambda| > \|x\| \xrightarrow{2.4a} \lambda 1 - x = \lambda(1 - \frac{x}{\lambda})$ invertierbar, da $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$, d.h. $\lambda \notin \text{Sp } x$.

b) X kompakter Raum. Dann $\text{Sp } f = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{C}(X)$.

2.8 Satz: A Banachalgebra mit $1, x \in A$. Dann $\text{Sp } x \neq \emptyset$.

"Beweis": Für jede Funktion $f \in A'$ ist $g: \mathbb{C} \setminus \text{Sp } x \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.
 $\lambda \mapsto f((\lambda - x)^{-1})$ (2.11)

$A: \text{Sp } x = \emptyset$, dann ist g ganz. Nach Hahn-Banach ex. $f \in A'$
 $\neg A: f(x^{-1}) \neq 0$ (da $0 \notin \text{Sp } x$, ist x invertierbar). Da $g(\lambda) \rightarrow 0$ für
 $|\lambda| \rightarrow \infty$, ist g beschränkt. Nach Liouville ist g also konstant,
 $\hookrightarrow$ d.h. $g \equiv 0$. Aber $g(0) = f(x^{-1}) \neq 0$ $\{$

2.9 Def: A Banachalgebra mit $1, x \in A$. Der Spektralradius
 von x ist definiert als $r(x) := \max_{\lambda \in \text{Sp } x} |\lambda|$ ($\leq \|x\|$)
 ($\text{Sp } x$ abgeschl.)

2.10 Bsp: • X kompakter Raum, dann $r(f) = \|f\|_\infty \quad \forall f \in C(X)$

• $A = M_2(\mathbb{C}), x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann $\|x\| = 1$, aber $r(x) = 0$.

$$\|x\|^2 = \|x^2\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 0, \quad \text{Sp } x = \{ \text{Eigenwerte von } x \}.$$

$\hookrightarrow$ Also $\lambda \in \text{Sp } x \Rightarrow \exists \{ \neq 0 \mid x \{ = \lambda \}$. Dann $0 = x^2 \{ = \lambda^2 \{ \Rightarrow \lambda = 0$

2.11 Prop. (Bourbaki): A Banachalgebra mit $1, x \in A$.

$$\text{Dann } r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \quad \left(\begin{array}{l} \text{algebraische Größe: } r(x) \\ \text{topologische Größe: } \lim \sqrt[n]{\|x^n\|} \end{array} \right)$$

"Beweis": Idee: Schreibe $(\lambda - x)^{-1} = \lambda^{-1} (1 - \frac{x}{\lambda})^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{\lambda})^n \quad \forall |\lambda| \geq r(x)$

Sehr skizzenhaft $\left\{ \begin{array}{l} \text{Die Summe } \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{\lambda})^n \text{ existiert} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} < |\lambda| \\ \text{Ist also } |\lambda| \geq r(x), \text{ so existiert } (\lambda - x)^{-1}, \text{ d.h. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq |\lambda| \quad \forall |\lambda| \geq r(x) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r(x). \end{array} \right.$

$$\text{Andererseits } \lambda \in \text{Sp } x \Rightarrow \lambda^n \in \text{Sp } x^n \Rightarrow |\lambda|^n \leq \|x^n\| \Rightarrow |\lambda| \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

$$(\lambda^n - x^n = (\lambda - x)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}x + \dots + x^{n-1}), \text{ d.h. } \lambda^n - x^n \text{ invertierbar} \Rightarrow \lambda - x \text{ invertierbar})$$

$$\hookrightarrow r(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

2.12 Satz (Gelfand-Maslov): A Banachalgebra mit 1 und Körper (d.h. jedes
 Element $a \neq 0$ in A ist invertierbar). Dann ist $A = \mathbb{C} \cdot 1$

"Beweis": $a \in A \xrightarrow{2.8} \text{Sp } a \neq \emptyset$, d.h. $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ so dass $\lambda - a$ nicht invertierbar. A Körper $\Rightarrow \lambda - a = 0$
 $\Rightarrow a = \lambda \cdot 1$

2.13 Prop.: $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ Algebrahomomorphismus (d.h. φ linear und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$) mit $\varphi(1) = 1$, A unitäre Banachalgebra.

Dann gilt $\forall a \in A: \varphi(a) \in \text{Sp } a$, φ ist stetig mit $\|\varphi\| \leq 1$.

Bew.: $\varphi(\varphi(a) \cdot 1 - a) = 0 \Rightarrow \varphi(a) \cdot 1 - a$ nicht invertierbar $\Rightarrow \varphi(a) \in \text{Sp } a$
 (x invertierbar $\Rightarrow 1 = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$)

$\hookrightarrow$ Nach 2.7 ist $|\varphi(a)| \leq \|a\|$, also $\|\varphi\| \leq 1$.

2.14 Def.: A Algebra. I ist ein Ideal in A , falls $I \subseteq A$ ein linearer Teilraum mit $A \cdot I, I \cdot A \subseteq I$ ist.

I heißt maximal, falls $I \subseteq J \subseteq A, J$ Ideal $\Rightarrow I = J$ oder $J = A$.

2.15 Bemerkung: Jedes Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten (Auswahlenlemma bzw. Lemma von Zorn).

2.16 Lemma: A Banachalgebra, $I \subseteq A$ abgeschlossenes Ideal.

Dann ist $\frac{A}{I}$ (der Quotientenvektorraum) eine Banachalgebra mit $(xy)' = x'y', (x+y)' = x'+y', (\lambda x)' = \lambda x', \|x'\| := \inf \{\|x+z\| : z \in I\} \leq \|x\|$

Bew.: $\|\cdot\|$ ist eine Norm ([...]), $\frac{A}{I}$ ist vollständig ([...]),

$\|x'y'\| \leq \|x'\| \|y'\|$: Zu $\varepsilon > 0$ ex. $z_1, z_2 \in I$ mit $\|x+z_1\| \leq \|x'\| + \varepsilon$, ebenso $z_2 \in I$ für y .

Dann $\|x'y'\| = \|(x+z_1)'(y+z_2)'\| \leq \|(x+z_1)(y+z_2)\| \leq \|x+z_1\| \|y+z_2\| \leq (\|x'\| + \varepsilon)(\|y'\| + \varepsilon)$
 ($\|x'\| \leq \|x\|$) $\forall \varepsilon > 0$

2.17 Prop.: A kommutative Banachalgebra mit 1. Dann gilt folgende bijektive Beziehung:

$\left\{ \varphi: A \rightarrow \mathbb{C} \text{ unitärer Algebrahom.} \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \text{maximale Ideale in } A \right\}$
 (d.h. $\varphi(1)=1$) $\varphi \longleftrightarrow \text{Ker } \varphi$

Bew: $\ker \varphi \subseteq A$ Ideal: $x \in \ker \varphi, y \in A \Rightarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0$
 $\Rightarrow xy \in \ker \varphi$

$\varphi: A \rightarrow \ker \varphi$ surj.: Sei $I \subseteq A$ maximales Ideal, dann ist I auch abgeschlossen ($I \subseteq \bar{I} \subseteq A \Rightarrow I = \bar{I}$, da $\bar{I} \neq A$ (2.13)). So A ist A/I Banachalgebra (2.16). Außerdem ist A/I Körper.

$\forall a \in A/I$. Dann $a \in A/I \subseteq A/I$ Ideal, da A/I kommutativ.
 Aber auch $\pi^{-1}(a \in A/I) \subseteq A$ Ideal, wo $\pi: A \rightarrow A/I$ Quotientenabb.,
 und $I \subseteq \pi^{-1}(a \in A/I) \stackrel{I \text{ max.}}{\Rightarrow} I = \pi^{-1}(a \in A/I)$ oder $\pi^{-1}(a \in A/I) = A$,
 d.h. $a \in A/I = 0$ ($\Rightarrow a = 0$) oder $a \in A/I = 1$ ($\Rightarrow a$ Einheit)

Nach 2.12 also $A/I = \mathbb{C}$, d.h. die Quotientenabb. ist
 $\pi: A \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow A$ $\pi(1) = 1$ und $I = \ker \pi$.

$\varphi \mapsto \ker \varphi$ inj.: $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$. Dann $\varphi_1(\varphi_1(x) \cdot 1 - x) = 0$
 $\Rightarrow 0 = \varphi_2(\varphi_1(x) \cdot 1 - x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad \forall x \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

2.18 Def: A Banachalgebra mit 1. Das Spektrum von A
 ist definiert als $\text{Spec } A := \{ \varphi: A \rightarrow \mathbb{C} \text{ unitäre Algebrenhom.} \}$

2.19 Prop: $\text{Spec } A$ ist kompakt.

Bew: Ist E ein normierter Raum, so ist die abgeschlossene Einheitskugel $(E')_1 = \{ x \in E' \mid \|x\| \leq 1 \}$ im Raum E' der Funktionale auf E kompakt in der (lokal-konvexen) Topologie der punktweisen Konvergenz ($\varphi_\alpha \rightarrow \varphi$ in $(E')_1 \Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \forall x \in E$). (Das folgt aus dem Satz von Tychonov bzw. dem Auswahllemma; Jedes Produkt von kompakten Räumen ist kompakt und $(E')_1 \subseteq \prod_{x \in E} \mathbb{C}_1$, wo $\mathbb{C}_1$ Einheitskugel.)
 $\text{Spec } A \subseteq (A')_1$ abgeschlossene Teilmenge: Sei $(\varphi_\alpha) \in \text{Spec } A \rightarrow A$ $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi \in (A')_1$
 Dann $\varphi_\alpha(1) = 1 \quad \forall \alpha \Rightarrow \varphi(1) = 1$, $\varphi(xy) = \varphi_\alpha(xy) = \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y) \rightarrow \varphi(x)\varphi(y)$
 $\Rightarrow \varphi \in \text{Spec } A$.

2.20 Satz: A Banachalgebra mit 1 . Dann ist die

Gelfandtransformation $\chi: A \rightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } A)$, $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$ für $\varphi \in \text{Spec } A$
 $x \mapsto \hat{x}$

ein stetiger Algebrenhomomorphismus.

Bew: $\widehat{x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \hat{x}(\varphi) + \hat{y}(\varphi)$, ebenso $\widehat{xy}(\varphi) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi)$

$\hookrightarrow$ stetig: $|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \stackrel{2.12}{\leq} \|x\| \quad \forall \varphi \Rightarrow \|\hat{x}\|_{\infty} \leq \|x\|$

2.21 Satz: A kommutative Banachalgebra mit 1 , $x \in \mathcal{B}$. Dann gilt:

(a) Der Wertebereich der Funktion $\hat{x} = \chi(x)$ ist $\text{Sp } x \subseteq \mathbb{C}$.

(b) $r(x) = \|\hat{x}\|_{\infty} = \|\chi(x)\|_{\infty}$

Bewe: (a) $\chi(x)(\text{Spec } A) \subseteq \text{Sp } x$: $\lambda \in \chi(x)(\text{Spec } A) \Leftrightarrow \exists \varphi \in \text{Spec } A$
 mit $\lambda = \chi(x)(\varphi) = \varphi(x)$. Dann $(\lambda - \chi(x))(\varphi) = \varphi(x)\varphi(1) - \varphi(x) = 0$, also
 $\lambda - \chi(x) = \chi(\lambda - x)$ wdh. Nullfkt. $\Rightarrow \lambda - x$ wdh. Nullfkt. $\Rightarrow \lambda \in \text{Sp } x$.

" $\Leftarrow$ ": $\lambda \in \text{Sp } x$. Dann $(\lambda - x)A \subseteq A$ echtes Ideal (da A kommutativ
 und $(\lambda - x)$ wdh. Nullfkt.) $\stackrel{2.15 \& 2.17}{\Rightarrow} \exists \varphi \in \text{Spec } A: (\lambda - x)A \subseteq \text{Ker } \varphi \subseteq A$

Also $\varphi(\lambda - x) = 0$, d.h. $\lambda = \varphi(x) \in \chi(x)(\text{Spec } A)$, $\uparrow$ (max. Ideal)

$\hookrightarrow$ (b) $r(x) \stackrel{(a)}{=} \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \chi(x)(\text{Spec } A)\} = \max\{|\varphi(x)| \mid \varphi \in \text{Spec } A\} = \|\chi(x)\|_{\infty}$