

§3 grundlegende Eigenschaften von C^* -Algebren

3.1 Def.: Sei A eine Algebra über $\mathbb{C}$. Eine Involution auf A ist eine antilineare Abbildung $^*: A \rightarrow A$ mit $x^{**} = x$, $(xy)^* = y^* x^*$.

Eine C^* -Algebra ist eine Banachalgebra A mit Involution, so dass $\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A$.

3.2 Bemerkung: (a) Jede Involution ist bijektiv (da $x^{**} = x$), es gilt $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ (denn $(x^{-1})^* x^* = (x x^{-1})^* = 1^* = 1$), $1^* = 1$, falls A unitär ist (denn $1^* x = (x^* 1)^* = x$), sowie $\operatorname{Sp} x^* = \overline{\operatorname{Sp} x}$ ($\lambda - x$ invertierbar $\Leftrightarrow (\lambda - x)^* = \bar{\lambda} - x^*$ invertierbar).

(b) Die Involution auf einer C^* -Algebra ist isometrisch, d.h. $\|x^*\| = \|x\|$ (denn $\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x^*\| \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$)
Außerdem ist $\|1\| = 1$. ($\|1\|^2 = \|1^* 1\| = \|1\| \in \{0, 1\}$)

3.3 Beispiele: • H Hilbertraum, dann $\mathcal{L}(H)$ C^* -Algebra (1.12, 1.13, 1.16)

- $M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist C^* -Algebra mit $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$
- X kompakt, dann $\mathcal{C}(X)$ C^* -Algebra mit $f^* = \overline{f}$, $\|\cdot\|_\infty$
 X lokal kompakt, dann $\mathcal{C}_0(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} \mid f \text{ verschwindet in } \infty\}$
 C^* -Algebra (d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists K \subseteq X \text{ kompakt} : |f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \notin K$)
- Jede * -invariante, abgeschlossene Unteralgebra einer C^* -Algebra ist wieder eine C^* -Algebra, z.B. $\mathcal{K}(H)$ (1.20, 1.21)

3.4 Prop.: (a) Sei A unitäre C^* -Algebra und $x \in A$ selbstadjungiert ($x^* = x$). Dann ist $r(x) = \|x\|$. (die Norm ist "algebraisch")
 (b) Auf einer unitären C^* -Algebra gibt es genau eine Norm, die sie zur C^* -Algebra macht.

Bew.: (a) $x^*x = x^2$. Also $r(x) \stackrel{2.11}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^{2^n}\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x\|^{2^n}} = \|x\|$
 $\Leftrightarrow \|x^2\| = \|x\|^2$

(b) Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei C^* -Normen auf A . Dann ist
 $\|x\|_1^2 = \|x^*x\|_1 \stackrel{(a)}{=} r(x) \stackrel{(a)}{=} \|x\|_2^2$.

3.5 Prop.: Seien A, B ^{unitäre} C^* -Algebren und $\varphi: A \rightarrow B$ ein $*$ -Homomorphismus, d.h. φ ist Algebrenhomomorphismus $\rightarrow A$ $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$.

Dann ist φ stetig, es gilt sogar $\|\varphi(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in A$.

Dies gilt sogar schon, wenn A bloß Banachalgebra mit Involution ist, so dass $\|x^*\| = \|x\|$ gilt. Daraus folgt, dass die C^* -Norm die kleinste Banachnorm ist.

Bew.: $\|x\|^2 \geq \|x^*x\| \stackrel{2.9}{\geq} r(x^*x) \geq r(\varphi(x^*x)) = r(\varphi(x)^*\varphi(x)) \stackrel{3.4}{=} \|\varphi(x)\|^2$

Es gilt: $\text{Sp}_B \varphi(x) \subseteq \text{Sp}_A x$, denn $\lambda - \varphi(x) = \varphi(\lambda - x)$ nicht invertierbar $\Rightarrow \lambda - x$ nicht invertierbar.

$\hookrightarrow$ Somit ist $\varphi: (A, \|\cdot\|_{\text{Banachnorm}}) \rightarrow (A, \|\cdot\|_{C^*\text{-Norm}})$ normvermindernd.

3.6 Satz: Sei A kommutative C^* -Algebra mit 1. Dann gilt:

(a) Jeder unitäre ($\varphi(1) = 1$) Algebrenhomomorphismus $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ ist schon $*$ -Algebrenhomomorphismus, d.h. $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} \quad \forall x \in A$

(b) Für die Gelfandtransformation aus Satz 2.20 gilt $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$, d.h. $\chi: A \rightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } A)$ ist ein stetiger $*$ -Algebrenhomomorphismus.

Bew: (a) Seien $\varphi(x) = \alpha + \beta i$, $\varphi(x^\sharp) = \gamma + \delta i$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Δ : $\beta \neq -\delta$. Setze $c := \frac{x + x^\sharp - (\alpha + \gamma)1}{\beta + \delta}$. Also $c = c^\sharp$, $\varphi(c) = i$.

Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ ist also $\varphi(c + \lambda i) = (1 + \lambda)i$

$$\Rightarrow 1 + 2\lambda + \lambda^2 = |\varphi(c + \lambda i)|^2 \stackrel{2.12}{\leq} \|c + \lambda i\|^2 = \|(c + \lambda i)^\sharp(c + \lambda i)\|$$

$$= \|(c - \lambda i)(c + \lambda i)\| = \|c^2 + \lambda^2\| \leq \|c^2\| + \lambda^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2\lambda \leq \|c^2\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Downarrow (\|c^2\| \text{ konstant})$$

Genauso ist $\alpha = \gamma$. (Δ $d := \frac{i\gamma + (ix)^\sharp + (\beta - \delta)1}{\alpha - \gamma}$)

$\perp$ (b) $\chi(x^\sharp)(\varphi) = \varphi(x^\sharp) \stackrel{(a)}{=} \overline{\varphi(x)} = \overline{\chi(x)(\varphi)} \stackrel{2.20}{=} \chi(x)(\varphi)$

3.7 Satz (Gelfand-Naimark): ^{oder: Neumaier} Sei A kommutative $C^\sharp$ -Algebra mit 1.

Dann ist die Gelfandtransformation $\chi: A \rightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } A)$
 $x \mapsto \hat{x}$

ein isometrischer $\sharp$ -Algebraisomorphismus (kurz: $\sharp$ -Isomorphismus).

Insofern sind die kommutativen $C^\sharp$ -Algebra mit 1 genau

die Funktionenalgebren $\mathcal{C}(K)$, K kompakt. (1. Isomorphiesatz)

Bew: Wegen 3.6 betr.: χ isometrisch (also auch injektiv), χ surjektiv.

χ isometrisch: $x \in A$. $\|\chi(x)\|_\infty^2 = \|\chi(x^\sharp x)\|_\infty \stackrel{2.21}{=} r(x^\sharp x) \stackrel{2.4}{=} \|x^\sharp x\| = \|x\|^2$.

χ surjektiv: Da χ isometrisch ist, ist $\chi(A) \subseteq \mathcal{C}(\text{Spec } A)$ vollständig.

($(\chi(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \chi(A)$ Cauchyfolge $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ Cauchyfolge, A vollständig)

Sei A ist $\chi(A) \subseteq \mathcal{C}(\text{Spec } A)$ abgeschlossene Unteralgebra, die $\sharp$ -invariant

ist und die Punkte trennt ($\varphi, \psi \in \text{Spec } A, \varphi \neq \psi \Rightarrow \exists x: \chi(x)(\varphi) = \varphi(x) \neq \psi(x) = \chi(x)(\psi)$)

Stone-Weierstraß

$\Rightarrow \chi(A) = \mathcal{C}(\text{Spec } A)$

3.8 Bemerkung: • Der Name " $C^\sharp$ -Algebra" wurde von Segal in

einem Artikel 1947 erfunden: C = continuous, $\sharp$, da die Involution eine starke Rolle spielt.
 (wegen 3.7)

• Die Arbeit von 3.7 steckt in Definition 3.1: Für welche Banachalgebra ist χ in Satz 2.20 ein Isomorphismus?

Bisher waren alle betrachteten C^* -Algebren unital, diese verhalten sich nämlich besonders schön. Wie behandelt man aber nicht-unital C^* -Algebren wie $C_0(X)$ für einen lokal kompakten Raum X , oder $K(H)$ (überhaupt Ideale)?

Auf zwei Arten: 1.) Man kann C^* -Algebren immer unitalisieren (s. dieses Kapitel)

2.) Man kann immer zumindest approximierende Einsen finden. (s. nächstes Kapitel)

3.9 Lemma: (a) Seien A, B C^* -Algebren. Dann ist $A \oplus B$ wieder C^* -Algebra mit koordinatenweisen Operationen und $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

(b) Sei A eine involutive Banchalgebra. Dann ist

$$\tilde{A} := \{(x, \lambda) \mid x \in A, \lambda \in \mathbb{C}\} \text{ eine involutive Banchalgebra mit } 1''^{(0,1)} \text{ per}$$

$$(x, \lambda) + (y, \mu) := (x + y, \lambda + \mu), \quad (x, \lambda) \cdot (y, \mu) := (xy + \lambda y + \mu x, \lambda \mu),$$

$$(x, \lambda)^{\pm} = (x^{\pm}, \bar{\lambda}), \quad \|(x, \lambda)\| := \|x\| + |\lambda|$$

Schreibe $\lambda 1 + x$ für die Elemente in $\tilde{A}$ (sonst Multiplikation intuitiver)

A kann in $\tilde{A}$ per $x \mapsto (x, 0)$ eingebettet werden (injektiver $\pm$ -Homomorphismus)

3.10 Satz: Sei A eine C^* -Algebra. Dann existiert auf $\tilde{A}$ genau eine Norm, die $\tilde{A}$ zu einer C^* -Algebra macht.

Bew.: Eindeutigkeit nach 3.4. br.: Existenz

1.) Sei A unital. Dann ist $\tilde{A} \xrightarrow{(\text{mit Eins } e)} A \oplus \mathbb{C}$ ein bijektiver, unitaler

$(\pm)$ -Algebrahomomorphismus. Also $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ als Algebren.

Dann besitzt $\tilde{A}$ eine C^* -Norm, nämlich die von $A \oplus \mathbb{C}$.

2.) Sei A nun nicht unit.

Betrachte $L: \tilde{A} \rightarrow \mathcal{L}(A) := \{T: A \rightarrow A \text{ stetig, linear}\}$
 $x \mapsto L_x$ (für $x = \lambda 1 + a$ ist $x b := \lambda b + a b$)

gegeben durch $L_x(b) := x b$. L ist wohldefiniert, da L_x linear und
 $\|L_x(b)\| = \|x b\| \leq \|(\lambda 1 + a) b\| = \|\lambda b + a b\| \leq (|\lambda| + \|a\|) \|b\|$
 falls $x = \lambda 1 + a \in \tilde{A}$, also $\|L_x\| \leq |\lambda| + \|a\|$, d.h. L_x stetig.

Setze dann $\|x\|_{\tilde{A}} = \|L_x\| = \sup \{\|(\lambda 1 + a) b\|_A \mid b \in A, \|b\| \leq 1\}$

Es gilt $\|a\|_{\tilde{A}} = \|a\|_A \quad \forall a \in A$

$\uparrow$ $\|a\| \|a^\dagger\| = \|a\|^2 = \|a a^\dagger\| = \|L_a(a^\dagger)\| \leq \|L_a\| \|a^\dagger\| \Rightarrow \|a\|_{\tilde{A}} \leq \|L_a\| = \|a\|_{\tilde{A}}$

$\downarrow$ Andererseits $\|L_a(z)\| = \|a z\| \leq \|a\| \|z\| \Rightarrow \|a\|_{\tilde{A}} = \|L_a\| \leq \|a\|_A$

$\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ ist eine Norm auf $\tilde{A}$.

$\uparrow$ bzw. $\|x\|_{\tilde{A}} = 0 \Rightarrow x = 0$. Sei dazu $x \in \tilde{A} \mapsto A \quad x = \lambda 1 + a, \lambda \neq 0$
 (Sonst $x \in A$ und $\|x\|_{\tilde{A}} = \|x\|_A$)
 $\nexists A: \|L_x\| = 0$. Dann $x b = 0 \quad \forall b \in A$, d.h. $\lambda b + a b = 0 \quad \forall b \in A$.

$\downarrow$ Dann ist jedoch $-\frac{a}{\lambda}$ eine Eins in A , da $b = -\frac{a}{\lambda} b$. Σ

$\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ ist submultiplikativ: $\|L_{xy}\| = \|L_x L_y\| \leq \|L_x\| \|L_y\|$

$\Sigma \hookrightarrow A$ ist $(\tilde{A}, \|\cdot\|_{\tilde{A}})$ Banachalgebra.

$\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ erfüllt die C^* -Bedingung:

Sei $x \in \tilde{A}$ und $\varepsilon > 0$. Dann ex. $b \in A \quad \|b\| \leq 1$ und $\|x b\|_A \geq \|L_x\| - \varepsilon$

$$\Rightarrow (\|L_x\| - \varepsilon)^2 \leq \|x b\|_A^2 = \|b^\dagger x^\dagger x b\|_A \leq \|b^\dagger\|_A \|L_{x^\dagger x}(b)\|_A \leq \|L_{x^\dagger x}\|$$

$$\Rightarrow \|L_x\|^2 \leq \|L_{x^\dagger x}\|, \text{ also } \|x\|_{\tilde{A}}^2 \leq \|x^\dagger x\|_{\tilde{A}}$$

Allgemein kann die C^* -Bedingung durch $\|x\|^2 \leq \|x^\dagger x\|$ ersetzt werden:

$\downarrow$ $\|x\|^2 \leq \|x^\dagger x\| \leq \|x^\dagger\| \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x^\dagger\| \Rightarrow \|x\| = \|x^\dagger\| \Rightarrow \|x\|^2 \leq \|x^\dagger x\| \leq \|x\|^2$

3.11 Bemerkung: Sind A, B Algebren, $\varphi: A \rightarrow B$ ein

Algebrahomomorphismus, so definiert $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ einen unitären
 $\lambda + x \mapsto \lambda + \varphi(x)$

Algebrahomomorphismus. Insoweit gilt beispielsweise Proposition 3.5
 auch für nicht unitäre C^* -Algebren

Bew: Setze $\varphi: A \rightarrow B$ aus 3.5 an $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ fort.

Nach 3.5 ist dann also $\|\tilde{\varphi}(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \tilde{A}$, also

und $\|\varphi(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in A$.

3.12 Def: Sei A eine nicht notwendig unitäre C^* -Algebra, $x \in A$.

Dann $\operatorname{Sp} x := \begin{cases} \operatorname{Sp}_A x & \text{falls } A \text{ unitär} \\ \operatorname{Sp}_B x & \text{falls } A \text{ nicht unitär} \end{cases}$

3.13 Bemerkung: • Ist A nicht unitär, so ist $0 \in \operatorname{Sp} x \quad \forall x \in A$
 ($x \in A$ kann nicht invertierbar sein)

• Ist A unitär und $u \in A$ unitär (d.h. $u^*u = uu^* = 1$), so ist $\operatorname{Sp} u \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$

• Ist $x \in A$ selbstadjungiert (A nicht notwendig unitär), so ist $\operatorname{Sp} x \subseteq \mathbb{R}$

• Ist $B \in A$ C^* -Unteralgebra, $x \in B$, so ist $\operatorname{Sp}_B x \subseteq \operatorname{Sp}_A x$

3.14 Def: Sei A kommutative, nicht notwendig unitäre C^* -Algebra.

Setze $\operatorname{Spec} A := \operatorname{Spec} \tilde{A} \setminus \{\tilde{0}\}$, wobei $\tilde{0}: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\lambda + x \mapsto \lambda$

3.15 Bemerkung: $\operatorname{Spec} A$ ist dann lokal kompakt und mit dem

Gelfandisomorphismus gilt $\tilde{A} \cong \mathcal{C}(\operatorname{Spec} \tilde{A})$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $A \cong \{f: \operatorname{Spec} \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} \mid f(\tilde{0}) = 0\}$
 $\downarrow$
 $\mathcal{C}_0(\operatorname{Spec} A)$

3.16 Def: Sei A C^* -Algebra, $M \subseteq A$ Teilmenge.

$C^*(M) :=$ kleinste C^* -Unteralgebra von A , die M enthält

3.17 Bemerkung: (a) A, B C^* -Algebra, $M \subseteq A$, $\varphi, \psi: C^*(M) \rightarrow B$

$*$ -Homomorphismen mit $\varphi|_M = \psi|_M \Rightarrow \varphi = \psi$

(denn $\{x \in C^*(M) \mid \varphi(x) = \psi(x)\} \subseteq A$ ist C^* -Unteralgebra, die M enthält)

(b) $x \in A$ heißt normal, falls $xx^* = x^*x$. Es gilt

$C^*(x)$ kommutativ $\Leftrightarrow x$ normal

(denn $C^*(x)$ ist der Abschluss von $\{\text{nichtkommutative Polynome in } x, x^*\}$, wobei $x^{k_1} x^{k_2} x^{k_3} x^{k_4} \dots x^{k_n}$ ein nichtkommutatives Monom ist)

3.18 Prop.: Sei A eine C^* -Algebra, $x \in A$ normal.

(a) Ist A unital, so ist $\text{Spec } C^*(x, 1) \xrightarrow{\cong} \text{Sp } x$ ein Homöomorphismus
 $\varphi \mapsto \varphi(x)$

(b) Ist A nicht notwendig unital, so ist $\text{Spec } C^*(x, 1) \rightarrow \text{Sp } x \setminus \{0\}$ ein Homöomorphismus
 $\varphi \mapsto \varphi(x)$

Beweis: (a) $\varphi \mapsto \varphi(x)$ ist injektiv nach 3.17a, surjektiv nach 2.21a (denn $\varphi(x) = \hat{x}(\varphi)$ und $C^*(x, 1)$ kommutativ nach 3.17b), stetig nach Definition der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\text{Spec } C^*(x, 1)$ (s. Bew. von 2.19).
L Dann ist auch die Umkehrfunktion stetig (da $\text{Spec } C^*(x, 1)$ kompakt)

3.19 Korollar: Der Gelfand-Isomorphismus (Satz 3.7) und die vorige Proposition (Prop. 3.18) liefern den Funktionalkalkül:

(a) Sei A C^* -Algebra mit 1, $x \in A$ normal.

Dann gilt $C^*(x, 1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(\text{Sp } x)$, wobei $x \mapsto \text{id}_{\text{Sp } x}$, $1 \mapsto 1$.

Γ $\beta: C^*(x, 1) \xrightarrow{\hat{x}} \mathcal{C}(\text{Spec } C^*(x, 1)) \xrightarrow{f} \mathcal{C}(\text{Sp } x)$, mit $\alpha: \text{Spec } C^*(x, 1) \rightarrow \text{Sp } x$,
 $\varphi \mapsto \varphi(x)$

L Dann $\beta(x)(\lambda) = (\hat{x} \circ \alpha^{-1})(\lambda) = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x) = \lambda$ für $\alpha(\varphi) = \lambda$. D.h. $\beta(x) = \text{id}_{\text{Sp } x}$

Somit ist $\mathcal{C}(\text{Sp } x) \rightarrow C^*(x, 1)$ ein $\mathbb{C}$ -Isomorphismus
 $f \mapsto f(x)$

$$\neg A \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \bar{f}(x) = f(x)^*$$

Die Idee hinterbei ist: Sei f ein Polynom in $\mathbb{C}[z]$ und $\bar{z}$.
 Dann ist $f(x)$ ein Polynom in x und x^* . Der Funktionalkalkül
 verallgemeinert diesen Polynom auf alle stetigen Funktionen $f \in \mathcal{C}(\text{Sp } x)$.
 Insofern können leicht Elemente A bestimmte Eigenschaften in
 $C^*(x, 1)$ abgelesen werden. ($\mathbb{C}$ nach dem Polynom von Stone-Weierstraß)

1. Beispiel: Sei $x \in A$ selbstadjungiert. Nach 3.13 (3) also $\text{Sp } x \subseteq \mathbb{R}$.

Betrachte $f_+, f_-: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f_+ \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array}$, $f_- \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array}$

Dann gilt $A \quad x_+ := f_+(x), \quad x_- := f_-(x)$:

$x = x_+ - x_-$, x_+, x_- selbstadjungiert, $\text{Sp } x_+, \text{Sp } x_- \subseteq [0, \infty)$,
 $x_+ x_- = x_- x_+ = 0$. ("Zerlegung in disjunkte positive Elemente")

2. Beispiel: $x \in A$ selbstadjungiert, $\text{Sp } x \subseteq [0, \infty)$. Dann ex. $\sqrt{x} \in A$,
 d.h. $(\sqrt{x})^2 = x$, $\sqrt{x}$ selbstadjungiert, $\text{Sp } \sqrt{x} \subseteq [0, \infty)$.

Der Funktionalkalkül verhält sich gut: Es gelten z.B.

$$\text{Sp } f(x) = f(\text{Sp } x), \quad g \text{ stetig auf } f(\text{Sp } x) \Rightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

(b) Ist A eine nicht-unitäre C^* -Algebra, $x \in A$ normal, dann gilt

$$C^*(x) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_0(\text{Sp } x) = \{f \in \mathcal{C}(\text{Sp } x) \mid f(0) = 0\} \subseteq \mathcal{C}(\text{Sp } x)$$

und auch hier ist ein Funktionalkalkül gegeben.

3.20 Prop.: Seien A, B C^* -Algebren, $\varphi: A \rightarrow B$ ein $\mathbb{C}$ -Homomorphismus.

(a) Ist $x \in A$ normal, $f \in \mathcal{C}(\text{Sp } x)$, so ist $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$

(b) Ist φ injektiv, so ist φ schon Isomorphismus. (erstmal!) (erstmal!)

Beweis: (a) klar für Polynome. Seien nun p_n Polynome, die gleichmäßig gegen f auf $Sp x$ konvergieren. Dann gilt $p_n(x) \rightarrow f(x)$.

$$\text{Dann } \varphi(f(x)) \leftarrow \varphi(p_n(x)) = p_n(\varphi(x)) \rightarrow f(\varphi(x)).$$

Bemerkung: $Sp \varphi(x) \in Sp x$, also ex. $f(\varphi(x))$.

$$(b) \text{ g.-z.z. } \|\varphi(x^*x)\| = \|x^*x\| \quad (\text{denn } \|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x^*x)\| = \|x^*x\| = \|x\|^2)$$

Sei φ nicht isometrisch, d.h. es ex. ein $x \in A$, so dass $\|\varphi(x^*x)\| < \|x^*x\|$ (z.z.)

Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  , mit den

Eigenschaften $0 \leq f \leq 1$, $f|_{(0, \|x^*x\|, \infty)} \equiv 1$, $f|_{(-\infty, \|\varphi(x^*x)\|)} \equiv 0$.

Dann $\|f(x^*x)\| = \|f\|_\infty = 1$, da der Funktionalkalkül isometrisch

ist und $\|x^*x\| \in Sp x^*x$ ($x(x^*x) = \|x^*x\|$). Außerdem $\|f(\varphi(x^*x))\| = 0$

L Dann $\varphi(f(x^*x)) \stackrel{(a)}{=} f(\varphi(x^*x))$ und $f(x^*x) \neq 0$, ist φ nicht injektiv.

3.21 Bemerkung: Der Funktionalkalkül für C^* -Algebren funktioniert nur für stetigen Funktionen. Für von-Neumann-Algebren hat man jedoch auch einen Kalkül messbarer Funktionen.

(C^* -Algebren $\leftrightarrow$ stetige Funktionen über einem Raum $\leftrightarrow$ Topologie
VN-Algebren $\leftrightarrow$ messbare Funktionen über einem Raum $\leftrightarrow$ Maßtheorie)