

§4 positive Elemente in C^* -Algebren

4-1

4.1 Def.: A C^* -Algebra. $a \in A$ heißt positiv (schreibe $a \geq 0$), falls $a = a^*$ und $\text{Sp } a \subseteq (0, \infty)$.

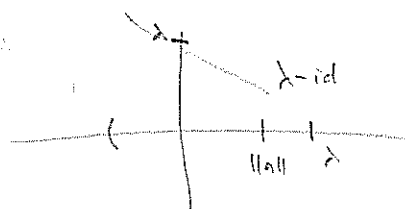
Schreibe $a \leq b$, falls $b - a \geq 0$.

4.2 Bemerkung: Jedes positive Element a einer C^* -Algebra besitzt eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel $\sqrt{a}$ (nach Funktionalkalkül).

4.3 Lemma: Sei $a \in A$ selbstadjungiert, A unitäre C^* -Algebra, $\lambda \geq \|a\|$.

Dann gilt: $a \geq 0 \iff \|\lambda 1 - a\| \leq \lambda$

Beweis: klar, für Funktionen:



$\text{Sp-Norm} \leq \lambda$
 $\iff \text{Sp } a \subseteq (0, \infty)$

Formal: $a \geq 0 \iff \text{Sp } a \subseteq (0, \infty) \iff \chi(a) = \text{id}_{\text{Sp } a} \geq 0$

$$\iff \|\lambda 1 - \chi(a)\|_{\infty} \leq \lambda$$

$$\stackrel{||}{=} \|\chi(\lambda 1 - a)\|_{\infty} = \|\lambda 1 - a\|$$

L

4.4 Prop.: $a, b \geq 0 \implies a + b \geq 0$

Beweis: $\lambda := \|a\| + \|b\| \geq \|a + b\|$. $\|\lambda - (a + b)\| \leq \underbrace{\|\|a\| - a\|}_{\leq \|a\|} + \underbrace{\|\|b\| - b\|}_{\leq \|b\|} \leq \lambda$, 4.3

4.5 Lemma: A C^* -Algebra, $x \in A$, $-x^*x \geq 0$. Dann $x = 0$.

Beweis: Schreibe $x = x_1 + ix_2$, $x_1 = \frac{x + x^*}{2}$, $x_2 = \frac{x - x^*}{2i}$, wobei also

x_1, x_2 selbstadjungiert sind ("Zerlegung in Real- und Imaginärteil").

$$\text{Dann } x^*x + xx^* = (x_1^2 + i x_1 x_2 - i x_2 x_1 + x_2^2) + (x_1^2 + i x_2 x_1 - i x_1 x_2 + x_2^2) = 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\implies x^*x = \underbrace{2x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{\geq 0} - \underbrace{xx^*}_{\geq 0} \stackrel{4.4}{\geq} 0 \implies \text{Sp } x^*x = \{0\} \stackrel{3.4a}{\implies} x^*x = 0 \implies x = 0$$

(In jeder Algebra A gilt für $x, y \in A$: $\text{Sp}(xy) \cup \{0\} = \text{Sp}(yx) \cup \{0\}$.)

L

4.6 Prop.: Sei A C^* -Algebra, $a \in A$. Dann sind äquivalent:

- (1) $a \geq 0$
- (2) $\exists h \in A$ selbstadjungiert $\neg \vdash a = h^2$
- (3) $\exists x \in A \neg \vdash a = x^*x$ (algebraische Schreibweise)

Bew.: (1) $\rightarrow$ (2): $h := \sqrt{a}$ nach 4.2, (2) $\rightarrow$ (3): $x := h$

(3) $\rightarrow$ (1): Schreibe $x^*x = u - v$, $u := (x^*x)_+ \geq 0$, $v := (x^*x)_- \geq 0$, $uv = vu = 0$
(vgl. 3.24)

Setze $y := xv$. Dann $-y^*y = -v x^*x v = -v(u-v)v = v^3 \geq 0$

4.5
 $\Rightarrow y = 0$, d.h. $v^3 = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow x^*x = u \geq 0$

4.7 Korollar: $\mathbb{I}$ über C^* -Algebra A ist

$A_+ := \{h \in A \mid h \text{ selbstadjungiert}, h \geq 0\} = \{x^*x \mid x \in A\} \subseteq A$ ein Kegel, d.h.

(1) $h \in A_+, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda h \in A_+$, (2) $h_1, h_2 \in A_+ \Rightarrow h_1 + h_2 \in A_+$.

Außerdem ist (4.5 & 4.6) $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ und für $A_{sa} := \{h \in A \mid h \text{ selbstadjungiert}\}$
ist $A_{sa} = A_+ - A_+$ (S. 3.19). Außerdem ist A_+ abgeschlossen nach 4.3.

Aufgrund der C^* -Bedingung ($\|x^*x\| = \|x\|^2$) kommt den positiven Elementen eine besondere Rolle zu.

4.8 Prop.: In einer C^* -Algebra gelten:

(a) $a, b \in A_{sa}, c \in A, a \leq b \Rightarrow c^*ac \leq c^*bc$

(b) $0 \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \|b\|$

(c) Ist A unital, $0 \leq a \leq b$, a, b invertierbar, so ist $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$

(d) $0 \leq \beta \leq 1$ (Zahl), $0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq a^\beta \leq b^\beta$ (insbes. $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$)

Bew.: (a) $c^*bc - c^*ac = c^*(b-a)c = \underbrace{(b-a)}_{=x^*x}c = (xc)^*(xc) \geq 0$

(b) o.E. $1 \in A$ (betrachte sonst $1 \notin A$). Betrachte a als Funktion, also
 $\|a\| = \inf\{\lambda \geq 0 \mid \lambda 1 \geq a\}$, $\|b\| = \inf\{\lambda \geq 0 \mid \lambda 1 \geq b\}$ (4.3)

$\Rightarrow \|b\| 1 \geq b \geq a \Rightarrow \|b\| 1 \geq a \Rightarrow \|b\| \geq \|a\|$.

(c) Habe $\sqrt[n]{a} a \sqrt[n]{a^{-1}} \stackrel{(a)}{\leq} \sqrt[n]{a^{-1}} b \sqrt[n]{a^{-1}} \Rightarrow d := \sqrt[n]{a} b^{-1} \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a^{-1}} b \sqrt[n]{a^{-1}})^{-1} \stackrel{(a)}{\leq} 1$
 $(a \geq 0 \Rightarrow a^{-1} \geq 0 \text{ nach Fkt.abbildg.}) \quad (x \geq 1 \Rightarrow x^{-1} \leq 1 \text{ f\"ur } x \text{ s.o., nach Fkt.abbildg.})$
 $\Rightarrow b^{-1} = \sqrt[n]{a^{-1}} d \sqrt[n]{a^{-1}} \stackrel{(a)}{\leq} \sqrt[n]{a^{-1}} \sqrt[n]{a^{-1}} = a^{-1}$

(d) komplettester Beweis.

Idee u. etw.: Schreibe die reellwertige Funktion $t \mapsto t^\beta$ als Integral $\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty f_\alpha(t) \alpha^{-\beta} d\alpha$ für $t \geq 0, \alpha > 0$, undere dieses Integral durch $\frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^N f_{\alpha_i}(t) \alpha_i^{-\beta}$ an und setze dann

$$0 \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\sum_{i=1}^N f_{\alpha_i}(b) \alpha_i^{-\beta} - \sum_{i=1}^N f_{\alpha_i}(a) \alpha_i^{-\beta} \right) \rightarrow b^\beta - a^\beta. \quad A_+ \text{ ist abgeschlossen.}$$

4.9 Bemerkung: Es gilt nicht $0 \leq a \leq b, \beta > 1 \Rightarrow 0 \leq a^\beta \leq b^\beta$,
 also insbesondere $0 \leq a^2 \leq b^2$ ist falsch i. A.

Es gilt sogar: „ $\exists \beta > 1 \forall x, y \in A_+ (0 \leq x \leq y \Rightarrow x^\beta \leq y^\beta)$ “ $\Rightarrow A$ ist Kommutativ //

Unsere Intuition muss doch hier also vom Verständnis im Kommutativen lösen.

Idee u. etw.: Gelte für $\beta=2$: $0 \leq x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

Seien $x, y \in A_+, \varepsilon > 0$. Dann $x \leq x + \varepsilon y$, d.h. $x^2 \leq (x + \varepsilon y)^2$

$$\Rightarrow 0 \leq xy + yx + \varepsilon y^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ also } xy + yx \geq 0.$$

Setze $xy = a + ib$ mit $a \geq 0, b$ selbstadjungiert. Zeige $b=0$.

Also $xy = a \geq 0$, insbesondere selbstadjungiert, d.h. $yx = (xy)^* = xy$

Für allgemeine $x, y \in A$ ist also mit $x = [(Re x)_+ - (Re x)_-] + i[(Im x)_+ - (Im x)_-]$

und y entsprechend, $xy = yx$.