

§ 7 universelle C^* -Algebra und die Toeplitzalgebra T

7-1

Erinnerung: Eine C^* -Algebra ist eine Algebra mit Involution, zusammen mit einer Norm, die $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ und $\|x^*x\| = \|x\|^2$ erfüllt, und bezüglich derer die Algebra vollständig ist. (Def. 2.1, Def. 3.1)

Das liefert einen Weg, eine C^* -Algebra allein aus Erzeugern und Relationen zu konstruieren, um somit gewisse Elemente bzw. C^* -algebraische Relationen in „Reinform“ zu studieren.

7.1 Konstruktion einer universellen C^* -Algebra:

- Sei $E = \{x_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Erzeugern, I Indexmenge
- Sei $P(E)$ die involutive Algebra der nichtkommutativen Polynome in $E \cup E^*$ (also $P(E) = \text{span} \{x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \dots x_{i_k}^{a_k} \mid -1\}$)
- Sei $R \subseteq P(E)$ eine Menge von Relationen
- Sei $J(R) \subseteq P(E)$ das von R erzeugte Ideal in $P(E)$.
- Setze $A(E, R) := \frac{P(E)}{J(R)}$, die „universelle involutive Algebra“
—A Erzeugern E und Relationen R “.
- Setze $\|x\| := \sup \{p(x) \mid p \text{ ist } C^*\text{-Halbnorm auf } A(E, R)\}$
für $x \in A(E, R)$, wobei p Halbnormen mit $p(x^*x) = p(x)^2$
und $p(xy) \leq p(x)p(y)$ sind. $\uparrow$ ($p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$)
- Ist $\|x\| < \infty$ für alle $x \in A(E, R)$, so setze
 $C^*(E \mid R) := \frac{A(E, R)}{\{x \in A(E, R) \mid \|x\| = 0\}} \xrightarrow{\|\cdot\|} \text{(Vervollständigung)}$

die „universelle C^* -Algebra“ —A Erzeugern E und
Relationen R “.

7.2 Bemerkung (a) Das ist das gleiche Prinzip (bsp. abstrahiert) wie in Def. 3.16 und Bem. 3.17: Nehme nichtkommutative Polynome in $\{x_i \mid i \in I\}$ und $\{x_i^* \mid i \in I\}$, die gewisse Relationen erfüllen (z.B. $x_1^* x_1 = 1$, $x_2 x_3 = x_4^2$ etc., d.h. die Polynome $x_1^* x_1 - 1$ und $x_2 x_3 - x_4^2$ werden herausgetestet), und stelle eine A über maximalen Norm $\|\cdot\|$ aus. Dann A diese wirklich eine Norm ist, wird der Nullraum $\{x \mid \|x\| = 0\}$ herausgetestet.

(b) Die Involution auf $P(E)$ ist per

$$(x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{*a_2} \dots x_{i_k}^{a_k})^* = x_{i_k}^{*a_k} \dots x_{i_2}^{a_2} x_{i_1}^{*a_1} \quad \text{und} \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$$

(c) Ist A eine beliebige involutive Algebra, so ist

$$C^*(A) = \overline{\{x \mid \|x\| = 0\}}^{\|\cdot\|} \quad A \quad \|x\| := \sup \{ \|p(x)\| \mid p \text{ } C^*\text{-Polynom auf } A \}$$

die einschließende C^* -Algebra von A , falls $\|x\| < \infty \quad \forall x \in A$.

(d) Die universelle C^* -Algebra $C^*(E/\mathbb{R})$ aus 7.1 hat folgende (sehr wichtige) universelle Eigenschaft:

Sei B eine C^* -Algebra A einer Teilmenge $E = \{y_i \in B \mid i \in I\}$, die die Relationen R erfüllt. Dann gibt es genau einen $*$ -Hom. $\varphi: C^*(E/\mathbb{R}) \rightarrow B$ mit $\varphi(x_i) = y_i$.

Der Umbenennungshomomorphismus $A(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi_0} B$
 $\searrow \text{def.} \nearrow C^*(E/\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi}$

Setzt sich zu $C^*(E/\mathbb{R}) \rightarrow B$ fort, da φ_0 stetig ist nach L der Definition von $\|\cdot\|$ auf $C^*(E/\mathbb{R})$.

(e) Gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $\|p(x_i)\| < C$ für jede Halbnorm p auf $A(E, \mathbb{R})$ und alle $i \in I$, so existiert $C^*(E, \mathbb{R})$ (d.h. $\|x\| < \infty \quad \forall x \in A(E, \mathbb{R})$), denn für jedes Monom $f = x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{*a_2} \dots x_{i_k}^{a_k} \in L$
 $\|f\| \leq C^{a_1 + a_2 + \dots + a_k} < \infty$, also auch für jedes Polynom.

7.3 Beispiel: Sei $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Dann ist

$C(S^1) \cong C^*(u, 1 \mid u^*u = uu^* = 1)$. Also ist $C(S^1)$ die universelle C^* -Algebra, die von einem Unitären erzeugt wird.

Bew: $C^*(u, 1) = C^*(u, 1 \mid \dots)$ wird von zwei Elementen u und 1 und den Relationen $u^*u = 1, uu^* = 1, 1 \cdot u = u, u \cdot 1 = u, \dots$ erzeugt. Die universelle C^* -Algebra existiert, da $p(1)^2 = p(1^*1) = p(1)$, d.h. $p(1) \leq 1$ und $p(u)^2 = p(u^*u) = p(1) \leq 1$. Die identische Funktion $z(t) = t$ in $C(S^1)$ und $1(t) = 1$ erfüllen $z^*z = zz^* = 1$, also ex. $\varphi: C^*(u, 1) \rightarrow C(S^1)$ und ist

$$\begin{array}{ccc} u & \mapsto & z \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

(7.26(1))

Surjektiv nach Stone-Weierstraß.

Andererseits ist $C^*(u, 1) \cong C(\text{Sp } u)$ nach Gelfand und $\text{Sp } u \subseteq S^1$ nach Blatt 2, A1(1).

Also ex. $\psi: C(S^1) \rightarrow C(\text{Sp } u) \xrightarrow{\cong} C^*(u, 1)$ (Funkt.kalk.)

$$f \mapsto f|_{\text{Sp } u} \mapsto f(u)$$

und $\psi \circ \varphi = \text{id}_{C^*(u, 1)}$, also φ auch injektiv.

Die Philosophie bei $C(S^1) \cong C^*(u, 1)$ ist: Habe $C^*(u, 1) \cong C(X)$ mit $X \subseteq S^1$. Da „ u universell“ ist, muss schon das Maximum, also $X = S^1$ gelten.

7.4 Beispiel: $C^*(x \mid x^2 = 0, x = x^*x^*x) \cong M_2(\mathbb{C})$

Bew: $C^*(x \mid \dots)$ ex., da $p(x)^2 = p(x^*x) = p(x^*x^*x) = p(x)^4$.

Betrachte $y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Dann $y^2 = 0, y = yy^*y$, also ex. $\varphi: C^*(x \mid x^2 = 0, x = x^*x^*x) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $\varphi(x) = y$.

φ ist surjektiv, da $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y^*y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, yy^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $M_2(\mathbb{C})$ ist.

Die Monome in $C^*(x \mid \dots)$ sind x, x^*, x^*x, xx^* , also ist $C^*(x \mid \dots)$ vierdimensional, genauso wie $M_2(\mathbb{C})$.

LA $\Rightarrow \varphi$ ist ein Isomorphismus

7.5 Beispiel: $C^*(x \mid x = x^*)$ existiert nicht, da es
s.a. Elemente beliebig großer Norm gibt, also $\|x\| = \infty$.

7.6 Beispiel: Für $n \geq 2$ sind isomorph:

(i) $M_n(\mathbb{C})$

(ii) $C^*(e_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}, \forall i, j, k, l)$

(iii) $C^*(x_1, \dots, x_n \mid x_i^* x_j = \delta_{ij} x_1)$

Bew: (i) $\cong$ (ii): $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ erfüllen die Relationen
von (ii). Also ex. $\varphi: C^*(e_{ij} \mid \dots) \xrightarrow{\varphi} M_n(\mathbb{C})$ und
 φ ist surjektiv. $C^*(e_{ij} \mid \dots)$ ist n^2 -dimensional, $M_n(\mathbb{C})$
ebenso, also ist φ auch injektiv.

($C^*(e_{ij} \mid \dots)$ ex., da $p(e_{ij})^2 = p(e_{ji} e_{ij}) = p(e_{jj}) \leq 1$,
denn $p(e_{jj})^2 = p(e_{jj}^2) = p(e_{jj}) \in (0, 1)$)

(ii) $\cong$ (iii): Es ex. $\varphi: C^*(e_{ij} \mid \dots) \rightarrow C^*(x_1, \dots, x_n \mid \dots)$
und $\psi: C^*(x_1, \dots, x_n \mid \dots) \rightarrow C^*(e_{ij} \mid \dots)$ mit $\varphi \circ \psi = \text{id}$,
 $\psi \circ \varphi = \text{id}$. Also φ, ψ Isomorphismen (Übung)

7.7 Bemerkung: Auf Blatt 3, A2 wurde gezeigt, dass $M_n(\mathbb{C})$
einfach ist, d.h. $I \triangleleft M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow I = 0$ oder $I = M_n(\mathbb{C})$.

Insofern gilt: Ist $\mathcal{B}$ eine C^* -Algebra mit $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{B}$,
und $\gamma_i^* \gamma_j = \delta_{ij} \gamma_1$, so ist $M_n(\mathbb{C}) \cong C^*(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \subseteq \mathcal{B}$.

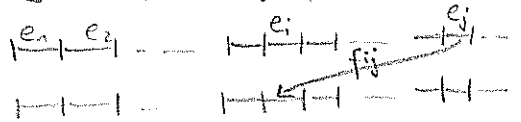
Denn es ex. $\varphi: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow C^*(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \subseteq \mathcal{B}$ nach 7.6 und
der universellen Eigenschaft. Außerdem $\text{Ker } \varphi \triangleleft M_n(\mathbb{C})$, also
 $\text{Ker } \varphi = 0$, falls $\varphi \neq 0$.

7.8 Beispiel: Es sind Isomorph:

- (i) $\mathcal{K}(H)$ die kompakten Operatoren auf einem sep. Hilbertraum
- (ii) $C^*(e_{ij}, i, j \in \mathbb{N} \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il} \quad \forall i, j, k, l \in \mathbb{N})$
- (iii) $C^*(x_i, i \in \mathbb{N} \mid x_i^* x_j = \delta_{ij} x_1)$

In (ii) und (iii) kann $\mathbb{N}$ durch eine beliebige abzählbare Indexmenge I ersetzt werden.

Bew: (i) $\cong$ (iii): Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine ONB von H und sei
 $f_{ij}(e_n) := \delta_{jn} e_i, n \in \mathbb{N}, i, j \in \mathbb{N}$.



Dann $f_{ij} \in \mathcal{K}(H)$, da f_{ij} endlich. Bild hat.

(also ist $f_{ij} B(0,1)$ abgeschlossen, beschränkt im Euklidischen Raum, also kompakt).

Es ex. $C^*(e_{ij} | \dots) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K}(H), \varphi(e_{ij}) = f_{ij}$ nach der univ. Eig.

φ ist surjektiv, da die Operatoren endlichen Ranges in $\mathcal{K}(H)$ dicht liegen und als Linearkombinationen der f_{ij} dargestellt werden können. Setze $M_n := C^*(e_{ij}, i, j = 1, \dots, n) \subseteq C^*(e_{ij} | \dots)$.

Dann ist $M_n(C) \cong M_n$ nach 7.6 und 7.7.

Somit ist $\varphi|_{M_n} : M_n \rightarrow \mathcal{K}(H)$ injektiv (denn $\text{Kern } \varphi|_{M_n} \triangleleft M_n \cong M_n(C)$)

und also Isometrie (5.10). Also ist φ Isometrie auf der dichten Teilmenge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \subseteq C^*(e_{ij} | \dots)$ und somit auch auf $C^*(e_{ij} | \dots)$.

10.1.2011 (ii) $\cong$ (iii): wie in 7.6, s. Übung Blatt 5

7.9 Bemerkung: $\mathcal{K}(H)$ ist einfach. (Übung, Blatt 5)

Nach Beispiel 7.3 liegt es nahe, auch die Struktur einer Isometrie an sich zu betrachten.

7.10 Definition: $J := C^*(v, 1 \mid v^*v = 1)$ ist die universelle C^* -Algebra, die von einer Isometrie erzeugt wird, die Toeplitzalgebra.

7.11 Erkennung: Sei H ein separabler Hilbertraum mit ONB $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Auf $B(H)$ haben wir gesehen, dass der einseitige (oder unilaterale) Shift $S \in \mathcal{L}(H)$, gegeben durch $Se_n = e_{n+1} \forall n$, eine Isometrie aber kein Unitäres ist.

7.12 Satz: Der kanonische $*$ -Hom. $\varphi: J \rightarrow C^*(S) \subseteq \mathcal{L}(H)$, $\varphi(v) = S$, ist ein Isomorphismus und die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(H) \rightarrow J \rightarrow \mathcal{L}(S^1) \rightarrow 0 \quad \text{ist exakt.}$$

(d.h. J besitzt ein Ideal $I \cong \mathcal{K}(H)$, so dass $J/I \cong \mathcal{L}(S^1)$)

(Philosophie: Um wieviel unterscheidet sich eine Isometrie an sich von einem Unitären an sich? Um die kompakten Operatoren.)

Bew: 1.) φ existiert, da S eine Isometrie ist, und ist surjektiv (auf $C^*(S)$). bzgl.: $\|\varphi(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in J$

Es gilt $\|x\| = \sup \{\|g(x)\| \mid g \text{ irred. Darst. von } J\}$, denn für alle solche g ist $\|g(x)\| \leq \|x\|$. Andererseits ex. eine irred. Darst. g mit $\|g(x)\| = \|x\|$. (6.25)

Da $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$ ist also zu zeigen, dass $\|g(x)\| \leq \|\varphi(x)\|$ für jede irred. Darst. g von J .

Vorüberlegung: Setze $p := 1 - vv^*$, der "Defekt" (hält v davon ab ein Unitäres zu sein). p ist eine Projektion.

Es gilt: $\forall x \in J \exists \lambda \in \mathbb{C}: p x p = \lambda p$

⌈ jedes Element in J ist der Form $\sum_{k=1}^N v^k v^{*k}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$ und für solche x gilt das: $p v^k v^{*k} p = \delta_{k,0} \delta_{k,0} p$

⌋

So $\exists$ ein Zustand $f: J \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow A$
 $p \times p = f(x)p \quad \forall x \in J \quad \uparrow \quad (f \text{ pos., linear, unital})$

Dann ist $(\pi_f(x) \tilde{I}_f | \tilde{I}_f) \stackrel{6.14}{=} \langle f(x) \rangle = (\varphi(x) e_1 | e_1) \quad \forall x \in J$

Π Sei $x = v^k v^{\sharp k}$, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Dann $(\varphi(x) e_1 | e_1) = (s^k s^{\sharp k} e_1 | e_1)$
 $\Pi = (s^{\sharp k} e_1 | s^{\sharp k} e_1) = \delta_{k0} \delta_{k0} 1 = f(v^k v^{\sharp k}) = f(x).$

Nach 6.13 sind π_f und φ unitär äquivalent.

Sei nun $g: J \rightarrow \mathcal{L}(H_g)$ irred. Darst. von J . bzz. $\|g(x)\| \leq \|\varphi(x)\|$

1. Fall: $g(p) \neq 0$. Dann ex. $\tilde{J} \in H_g$ mit $\|\tilde{J}\|=1$ und $g(p)\tilde{J}=\tilde{J}$.

Dann $(g(x)\tilde{J}|\tilde{J}) = (g(x)g(p)\tilde{J}|g(p)\tilde{J}) = (g(p \times p)\tilde{J}|\tilde{J}) = f(x)(g(p)\tilde{J}|\tilde{J}) = f(x)$

Nach 6.13 gilt also $g \cong \pi_f \cong \varphi$ (unter $\tilde{A}_{\tilde{J}}$), d.h.

$\|g(x)\| = \|U\varphi(x)U^*\| \leq \|\varphi(x)\|$ für ein $U: H \rightarrow H_g$ unitär.

2. Fall: $g(p)=0$. Dann ist $g(v)$ unitär, also ex.

$\psi: \mathcal{P}(S^1) \rightarrow C^*(g(v)) \hookrightarrow A$ mit $\psi(z)=g(v)$. (S. 7.3)

Zeige in 2.): $\mathcal{K}(H) \triangleleft C^*(S) \hookrightarrow \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \cong \mathcal{P}(S^1)$

via $C^*(S) \xrightarrow{\phi} \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \cong \mathcal{P}(S^1).$

$S \mapsto \phi(S) \mapsto z$

Also $J \xrightarrow{\psi} C^*(S) \xrightarrow{\phi} \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \cong \mathcal{P}(S^1) \xrightarrow{\chi} C^*(g(v))$,
 $v \mapsto S \mapsto \phi(S) \mapsto z \mapsto g(v)$

d.h. $g = \chi \circ \phi \circ \psi \circ \varphi$ (genügt auf Erzeugern zu überprüfen, 3.17)

Also $\|g(x)\| = \|\chi \circ \phi \circ \psi \circ \varphi(x)\| \leq \|\varphi(x)\|.$

2.) Laut 7.8 ist $\mathcal{K}(H) = C^*(f_{ij} | i, j \in \mathbb{N}) \hookrightarrow f_{ij}(e_n) = \delta_{jn} e_i.$

Andererseits $f_{ij} = S^{(i-1)}(1 - SS^{\sharp})S^{\sharp(i-1)}$ für $i, j \in \mathbb{N}$

$\Pi S^{(i-1)}(1 - SS^{\sharp})S^{\sharp(i-1)} e_n = \begin{cases} S^{(i-1)}(1 - SS^{\sharp}) e_{n-j+1} & n \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\left(\begin{array}{l} 1 - SS^{\sharp} \text{ ist die} \\ \text{Projektion auf } \langle e_n \rangle \end{array} \right) \cong \begin{cases} S^{(i-1)} e_n & n = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
 $= \delta_{nj} e_{1+(i-1)} = \delta_{nj} e_i$

Π

Daher ist $f_{ij} \in C^*(S) \quad \forall i, j$, d.h. $K(H) \subseteq C^*(S)$.

Da $K(H)$ ein Ideal in $\mathcal{L}(H)$ ist, ist $K(H)$ auch ein Ideal in $C^*(S)$.

Unter $\sigma: C^*(S) \rightarrow \frac{C^*(S)}{K(H)}$ ist $\sigma(S)$ invertierbar
(da $\sigma(1 - SS^*) = 0$)

Also $\frac{C^*(S)}{K(H)} \cong C^*(Sp \sigma(S))$. bzw. $Sp \sigma(S) = \begin{pmatrix} f_{11} & \\ & \ddots \\ & & f_{nn} \end{pmatrix}$

Sei $\lambda \in S^1$. Betrachte $d(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$, gegeben durch $d(\lambda)e_n = \lambda^n e_n$.

Dann $d(\lambda)^* = d(\bar{\lambda})$ und $d(\lambda)$ ist invertierbar.

Hinzu $d(\lambda)S e_n = d(\lambda)e_{n+1} = \lambda^{n+1} e_{n+1} = \lambda S d(\lambda)e_n \quad \forall n$,

also $d(\lambda)S = \lambda S d(\lambda)$ bzw. $d(\lambda)S d(\lambda)^* = \lambda S$.

Somit ist $\rho: C^*(S) \rightarrow C^*(S)$ ein Automorphismus
(Isomorphismus auf sich selbst)
 $x \mapsto d(\lambda)x d(\lambda)^*$

Wird $\rho(K(H)) \subseteq K(H)$ (denn $\rho(f_{ij}) = d(\lambda)S^{(i-1)}(1 - SS^*)S^{*(j-1)}d(\lambda)^*$
 $= \lambda^{i-j} f_{ij} \in K(H)$)

$\Rightarrow \hat{\rho}: \frac{C^*(S)}{K(H)} \rightarrow \frac{C^*(S)}{K(H)}$ Automorphismus mit
 $\hat{\rho}(\sigma(x)) = \sigma(\rho(x))$
 $\hat{\rho}(\sigma(S)) = \lambda \sigma(S)$

Dann ist $Sp \sigma(S) = Sp \hat{\rho}(\sigma(S)) = \lambda Sp \sigma(S)$

$\forall \lambda \in S^1$
 $\Rightarrow Sp \sigma(S) = S^1$

L

7.13 Bemerkung: Obiger Beweis zeigt: $J \cong C^*(S)$.

$$\nabla K(H) = C^*(f_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N})$$

Unter dem Isomorphismus ist $v^{(i-1)}(1 - w^*)v^{*(j-1)} \leftrightarrow f_{ij}$.

Kann daher auch direkt sehen:

$$K = C^*(e_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}) \hookrightarrow J \quad \text{für } i, j \in \mathbb{N}$$

$$e_{ij} \mapsto v^{(i-1)}(1 - w^*)v^{*(j-1)}$$

Insoweit ist $K \cong \langle 1 - w^* \rangle \triangleleft J$, wobei $\langle 1 - w^* \rangle$ das von $1 - w^*$ erzeugte Ideal bezeichnet.

7.14 Bemerkung: Wir haben gesehen:

$$C^*(v \mid v \text{ ist Isometrie}) \cong C^*(S \text{ unilater. Shift}) \subseteq \mathcal{L}(H)$$

Ebenso kann man zeigen:

$$C^*(u \mid u \text{ ist unitär}) \cong C^*(\tilde{S} \text{ bilateral Shift}) \subseteq \mathcal{L}(H'),$$

wobei $H' \perp$ ONB $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $\tilde{S}e_n := e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
 $(\tilde{S} \text{ ist also unitär})$.

(Zeige dann $Sp \tilde{S} = S^1$ genau wie im Beweis von 7.12)

7.15 Bemerkung: Außerdem wird die Toeplitzalgebra auch über

Toeplitzoperatoren eingeführt: Der Hilbertraum $L^2(S^1)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf S^1 bzgl. des (normierten) Lebesguemaßes hat eine ONB $e_n = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, wobei z die identische Funktion auf S^1 ist. Sei $H^2 \subseteq L^2(S^1)$ der Teilraum, der von $(e_n)_{n \geq 0}$ aufgespannt wird. Zu $g \in L^\infty(S^1)$ ist $M_g: L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ ein Multiplikationsoperator und $f \mapsto gf$

$T_g: H^2 \rightarrow H^2$, $T_g := P_{H^2} M_g$ ein Toeplitzoperator mit Symbol g .

(P_{H^2} ist die Projektion auf H^2). Dann korrespondiert T_z zu dem unilateralen Shift S (denn $T_z e_n = z \cdot z^n = e_{n+1}$).

Man stellt dann, dass $J \cong \{T_f + k \mid f \in \mathcal{C}(S^1), k \in \mathcal{K}(H)\}$, da letzteres die von T_z erzeugte C^* -Algebra ist.

7.16 Bemerkung (Satz von Coburn): Ist H ein Hilbertraum und $w \in \mathcal{L}(H)$ eine echte Isometrie (d.h. $w^*w = 1$, $ww^* \neq 1$), so ist $J \cong C^*(w) \subseteq \mathcal{L}(H)$.

$$v \mapsto w$$

Mit anderen Worten: Ist A eine C^* -Algebra und $w \in A$ eine echte Isometrie, so ist $J \cong C^*(w) \subseteq A$.

Das folgt aus der Wold-Zerlegung: Ist u eine Isometrie auf einem Hilbertraum H , dann ist u unitär äquivalent zu $(S \oplus 1) \oplus u$, wobei S der unitäre Shift ist und u unitär ist. D.h. der Shift ist im Wesentlichen die einzige Isometrie.

7.17 Def.: Seien A, B unitäre C^* -Algebren. Das (unitäre) freie Produkt $A \dot{+}_c B$ ist die universelle C^* -Algebra, die von allen $a \in A$ (A den Relationen von A) und allen $b \in B$ (A den Relationen von B) erzeugt wird, so dass außer $1_A = 1_B$ keine Relationen zwischen $a \in A$ und $b \in B$ gelten.

Allgemeiner ist $A \dot{+}_c B$ das amalgamierte freie Produkt von A und B , wenn A, B und C C^* -Algebren sind, so dass $C \xrightarrow{j_1} A$ und $C \xrightarrow{j_2} B$ Einbettungen sind (C kann also als Unteralgebra sowohl von A als auch von B aufgefasst werden). $A \dot{+}_c B$ ist dann die universelle C^* -Algebra, die von allen $a \in A$ (A den Relationen von A) und allen $b \in B$ (A den Relationen von B) erzeugt wird, so dass $j_1(c) = j_2(c) \quad \forall c \in C$ (d.h. die Elemente von C werden in A und B identifiziert).