

§8 die (irrationale) Rotationalalgebra A_θ

8-1

8.1 Def: Die Rotationalalgebra A_θ ist als universelle C^* -Algebra definiert: $A_\theta := C^*(u, v \text{ unitär} \mid uv = e^{2\pi i \theta} vu)$ wobei $\theta \in \mathbb{R}$. Wir schreiben oft abkürzend $\lambda := e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{C}$. Ist $\theta \notin \mathbb{Q}$, so heißt A_θ irrationale Rotationalalgebra, andernfalls rationale Rotationalalgebra.

8.2 Bemerkung: Da die irrationalen Rotationalalgebren sehr viel schönere Eigenschaften haben als die rationalen, wird meistens nur erstere behandelt in der Literatur und es wird bloß von Rotationalalgebren gesprochen, ohne $\theta \notin \mathbb{Q}$ zu spezifizieren.

8.3 Bemerkung: Ist $\theta = 0$, so ist A_θ kommutativ und es gilt

$$A_{\theta=0} = C(\mathbb{T}^2), \text{ wobei } \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \text{ der 2-Torus ist.}$$



Deshalb heißt A_θ auch „nichtkommutativer Torus“ und ist gewissermaßen ein vorsichtiger Schritt des Nichtkommutativen, da sich viele

Ergebnisse von $C(\mathbb{T}^2)$ auf A_θ übertragen lassen.

Beweis: Betrachte $\tilde{u}(x, y) := x$ und $\tilde{v}(x, y) := y$ in $C(\mathbb{T}^2)$.

Dann sind $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ unitär und erzeugen $C(\mathbb{T}^2)$ nach Stone-Weierstraß. Also ex. $A_{\theta=0} \twoheadrightarrow C(\mathbb{T}^2)$. Nach

dem Gelfand Isomorphismus ist $A_{\theta=0} \cong C(\text{Spec } A_{\theta=0})$

und $\text{Spec } A_{\theta=0} \cong \mathbb{T}^2$ (homeomorph), da jeder Charakter

$\chi \in \text{Spec } A_{\theta=0}$ schon durch $\chi(u)$ und $\chi(v) \in S^1$ festgelegt ist. (vgl. 7.3)

$$(\text{„} A_\theta = C(\mathbb{T}_{\text{nichtkom.}}^2 \text{“})$$

8.4 Prop.: A_g ist auf $L^2(S^1)$ darstellbar:

$$\tilde{u}: L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1), (\tilde{u}f)(t) := f(\lambda t) \quad \forall f \in L^2(S^1), t \in S^1$$

$$\tilde{v}: L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1), (\tilde{v}f)(t) := t f(t) \quad \forall f \in L^2(S^1), t \in S^1$$

Dann sind $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{L}(L^2(S^1))$ unitär mit $\tilde{u}\tilde{v} = \lambda \tilde{v}\tilde{u}$, also

$$\text{ex. } A_g \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(S^1)) \text{ mit } u \mapsto \tilde{u}, v \mapsto \tilde{v}.$$

(Oft wird die Rotationsalgebra auch so abgehandelt.)

Bew.: $\tilde{u}^*$ ist der Form $(\tilde{u}^*f)(t) = f(\bar{\lambda}t)$, denn

$$(\tilde{u}^*f|g) = (f|\tilde{u}g) = \int_{S^1} f(t) \overline{\tilde{u}g(t)} dt = \int_{S^1} f(t) \overline{g(\lambda t)} dt = \int_{S^1} f(\bar{\lambda}t) \overline{g(t)} dt.$$

Dann $(\tilde{u}^*(\tilde{u}f))(t) = (\tilde{u}f)(\bar{\lambda}t) = f(\lambda(\bar{\lambda}t)) = f(t)$, d.h. $\tilde{u}^*\tilde{u} = 1 = \tilde{u}\tilde{u}^*$.

$\tilde{v}^*$ ist der Form $(\tilde{v}^*f)(t) = \bar{t}f(t)$. $((f|\tilde{v}g) = \int_{S^1} f(t) \overline{\tilde{v}g(t)} dt)$

Also $(\tilde{v}^*(\tilde{v}f))(t) = \bar{t}(\tilde{v}f)(t) = \bar{t} t f(t) = f(t)$, also $\tilde{v}^*\tilde{v} = 1 = \tilde{v}\tilde{v}^*$.

Und $(\tilde{u}(\tilde{v}f))(t) = (\tilde{v}f)(\lambda t) = \lambda t f(\lambda t) \quad \forall t \in S^1 \quad \tilde{u}\tilde{v} = \lambda \tilde{v}\tilde{u}$

$$(\tilde{v}(\tilde{u}f))(t) = t(\tilde{u}f)(t) = t f(\lambda t)$$

L

8.5 Prop.: A_g ist wie folgt darstellbar: Sei H ein separabler Hilbertraum mit ONB $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\tilde{S} \in \mathcal{L}(H)$ der bilaterale Shift, gegeben durch $\tilde{S}e_n = e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, $d(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$ gegeben durch $d(\lambda)e_n := \lambda^n e_n$. Dann sind $\tilde{S}$ und $d(\lambda)$ unitär und $d(\lambda)\tilde{S} = \lambda \tilde{S}d(\lambda)$.

(Mit dem ONB $e_n = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ auf $L^2(S^1)$ ist $\tilde{u} \leftrightarrow d(\lambda)$, $\tilde{v} \leftrightarrow \tilde{S}$.)

Bew.: $\tilde{S}$ ist unitär mit $\tilde{S}^*e_n = e_{n-1}$, $d(\lambda)$ ebenso mit $d(\lambda)^* = d(\bar{\lambda})$.

Dann $d(\lambda)\tilde{S}e_n = d(\lambda)e_{n+1} = \lambda^{n+1}e_{n+1} = \lambda \tilde{S}d(\lambda)e_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

(Vgl. auch im Beweis von 7.12)

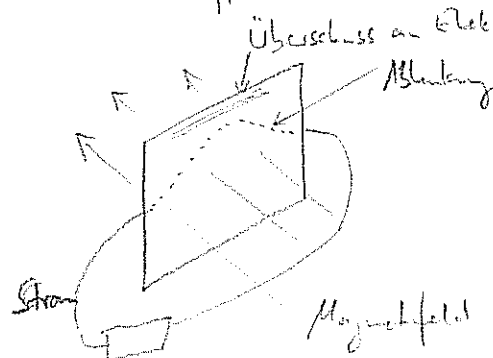
L

8.6 Bemerkung: Prop. 8.4 und Prop 8.5 zeigen, dass A_g „existiert“, d.h. die Relationen von A_g definieren keine triviale C^* -Algebra. (Wie z.B. $C^*(u)$ unitär ($u^2=0$) = 0, da $u = uuu^* = 0$)

8.7 Vorlesung (S. Gracia-Bondia et al, Vorwort zu Kapitel 12):

- Die nichtkommutativen Tori sind erste Beispiele von nichtkommutativen Riemannschen Flächen / nichtkommutativen Mannigfaltigkeiten.
- Eine solche nichtkommutative (Differential-) Geometrie zu verstehen wäre sehr wichtig für die Beziehungen zur Physik, z.B. um das Higgs-Feldchen besser zu beschreiben.
Zitat: „At a deep and perhaps fundamental level, quantum field theory and noncommutative geometry are made of the same stuff.“ (Gr.-B., S.522)
- Nichtkommutative Tori werden als Modelle in verschiedenen physikalischen Theorien benutzt, so z.B. in der Superstringtheorie, in der Fermionfeldtheorie, in der Raum-Zeit-Geometrie oder um den Quanten-Hall-Effekt zu beschreiben:

Hall-Effekt (1880):
Edwin



Eine der ersten Hinweise auf Existenz von Elektronen
→ Lady
(Entdeckung der Elektronen:
1897 Joseph Thomson)

Quanten-Hall-Effekt: ^{sehr} (1980)
(Klaus von Klitzing 1980, hierfür Nobelpreis) (1985)
Bei tiefen Temperaturen und starken Magnetfeldern steigt die Spannung sehr linear sondern in Stufen an (Quantisierung). Die magnetische Ablenkung wird durch zwei Unitäre u und v mit $uv = e^{2\pi i k}$ beschrieben.
Connes lieferte die Techniken für diese Beschreibung und bekam dafür die Fields-Medaille (1982).

Quellen: • Alain Connes, Non-commutative Geometry, Chapter 4.6
• Bellissard, van Elst, Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect
• Gracia-Bondia, Várilly, Figueroa, Elements of Noncommutative Geometry, Kapitel 12 ^{Quellenangabe} [334], [497]

Sind die Darstellungen aus 8.4 und 8.5 isomorph?
Sind sie isomorph zu $A_{\mathbb{Z}}$? Zeige nun, dass $A_{\mathbb{Z}}$ einfach
ist, d.h. alle Ideale sind „0“.

8.8 Definition: Sei A eine unitäre C^* -Algebra.

- Ist $B \subseteq A$ eine C^* -Unteralgebra mit $1 \in B$, so ist
 $\varphi: A \rightarrow B \subseteq A$ eine (bedingte) Erwartung auf B ,
falls φ positiv, linear und unital ist, mit $\varphi^2 = \varphi$.
 φ ist treu, falls $a \geq 0, \varphi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.
- $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine (normalisierte) Spur, falls τ positiv, linear ist,
mit $\| \tau \| = 1$ und $\tau(ab) = \tau(ba) \quad \forall a, b \in A$.
 τ ist treu, falls $a \geq 0, \tau(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.

8.9 Prop.: (a) Für $\xi, \mu \in S^1$ ist $\varphi_{\xi, \mu}: A_{\mathbb{Z}} \rightarrow A_{\mathbb{Z}}$, gegeben durch

2. Moment

$\varphi_{\xi, \mu}(u) = \xi u, \varphi_{\xi, \mu}(v) = \mu v$ ein Automorphismus.

(b) Die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2: A_{\mathbb{Z}} \rightarrow A_{\mathbb{Z}}$, gegeben durch

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 \varphi_{1, e^{2\pi i t}}(x) dt \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = \int_0^1 \varphi_{e^{2\pi i t}, 1}(x) dt$$

sind kontrahierende, treue Erwartungen mit $\varphi_1(A_{\mathbb{Z}}) = C^*(u) \subseteq A_{\mathbb{Z}}$,
($\| \varphi_j \| \leq 1$)

$\varphi_2(A_{\mathbb{Z}}) = C^*(v) \subseteq A_{\mathbb{Z}}$ und $\varphi_1|_{C^*(u)} = \text{id}_{C^*(u)}, \varphi_2|_{C^*(v)} = \text{id}_{C^*(v)}$

Außerdem gilt $\varphi_1\left(\sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} a_{k\ell} u^k v^{\ell}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k0} u^k, \varphi_2\left(\sum_{k, \ell} a_{k\ell} u^k v^{\ell}\right) = \sum_{\ell} a_{0\ell} v^{\ell}$

→ Somit $\varphi_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n u^j x u^{-j}, \varphi_2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n v^j x v^{-j} \quad \forall x \in A_{\mathbb{Z}}$
($u^{-k} := u^{*k}$ für $k \in \mathbb{N}$)

das gilt
nicht für
 $v \in A_{\mathbb{Z}}$.

Sei beispielsweise

$v = \frac{u + u^*}{2}$. Dann ist $\varphi_1(v^q) = 0$ aber

$$\frac{1}{2n+1} \sum_j u^j v^q u^{-j} = \left(\frac{1}{2n+1} \sum_j \lambda^j \right) v^q = v^q$$

Beweis: (a) $\mathcal{I}_u, \mu v$ sind unitär $\neg \wedge (\mathcal{I}_u)(\mu v) = \lambda(\mu v)(\mathcal{I}_u)$,
 also ex. $\mathcal{S}_{\mathcal{I}, \mu}$ und der univ. Eij. und $\mathcal{S}_{\mathcal{I}, \mu} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}, \mu}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}, \mu}^{-1} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}, \mu} = \text{id}_{A_\ell}$.

(b) Für $x \in A_0$ ist $f_x: \mathbb{T}^2 \rightarrow A_0$ normstetig.
 $(\mathcal{I}, \mu) \mapsto \mathcal{S}_{\mathcal{I}, \mu}(x)$

(den für $x = \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} a_{k, \ell} u^k v^\ell$ ist $\|f_x(\mathcal{I}_1, \mu_1) - f_x(\mathcal{I}_2, \mu_2)\| \leq \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} |\mathcal{I}_1^k \mu_1^\ell - \mathcal{I}_2^k \mu_2^\ell| |a_{k, \ell}|$
 $\xrightarrow{\text{für } (\mathcal{I}_1, \mu_1) \rightarrow (\mathcal{I}_2, \mu_2)} 0$

Also ist auch $g_x: [0, 1] \rightarrow A_\ell$ normstetig,
 $t \mapsto f_x(1, e^{2\pi i t})$

dh. $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_x(t_j) \rightarrow \int_0^1 g_x(t) dt = \varphi_1(x)$ ex. als Limes von

Riemannsummen. (für $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$)

Aus $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t_j}}(x) \rightarrow \varphi_1(x)$ folgt außerdem, dass

φ_1 kontrahierend, ($\|\varphi_1(x)\| \leftarrow \frac{1}{n} \|\sum \mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t_j}}(x)\| \leq \frac{1}{n} [\|\sum \mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t_j}}(x)\|] = \|x\|$)

positiv, ($x \geq 0 \Rightarrow \mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t}}(x) \geq 0 \forall t$, $\varphi_1(x)$ also Limes von pos. El.)

linear, unitär ($\mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t}}(1) = 1 \forall t$) und Aren ist.

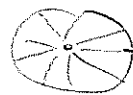
$\varphi_1(u^k v^\ell) \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t_j}}(u^k v^\ell) = u^k \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t_j}}(v^\ell) \right) \rightarrow u^k \varphi_1(v^\ell)$

und $\varphi_1(v^\ell) = \int_0^1 \mathcal{S}_{1, e^{2\pi i t}}(v^\ell) dt = \int_0^1 e^{2\pi i t \ell} v^\ell dt = \int_0^1 e^{2\pi i t \ell} dt v^\ell = \delta_{0, \ell}$.

Sei $\varphi_1|_{C^2(u)} = \text{id}_{C^2(u)}$, $\varphi_1(A_0) = C^2(u) \subseteq A_\ell$ und $\varphi_1^2 = \varphi_1$

($\varphi_1 \varphi_1(x) = \text{id}_{C^2(u)} \varphi_1(x) = \varphi_1(x) \forall x \in A_\ell$).

Schreibweise: $\lim_{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=-2^n}^{2^n} u^{\vec{j}} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\ell=-2^n}^{2^n} \lambda^{\vec{j} \cdot \ell} u^{\vec{k} - \vec{j}} v^\ell \right) = \lim_{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=-2^n}^{2^n} u^{\vec{j} \cdot \vec{k}} \lambda^{\vec{j} \cdot \vec{k} - \vec{j} \cdot \vec{j}} v^{\vec{k} - \vec{j}}$
 $= \left(\lim_{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=-2^n}^{2^n} \lambda^{\vec{j} \cdot \vec{k}} \right) u^{\vec{k}} v^{\vec{k}}$
 $= \varphi_1(u^{\vec{k}} v^{\vec{k}}) \xrightarrow{\delta_{0, \ell}}$



$\vec{j} = \lambda^\ell, \ell \neq 0$.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda^j = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} - 1 + \frac{\lambda^{-n} - 1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^{-n} - \lambda^{n+1}}{\lambda - 1}$$

Beschreibt durch $\frac{2}{1 - \lambda}$

8.10 Brouwer: $\tau := \psi_1 \psi_2 = \psi_2 \psi_1: A_0 \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine unitäre treue Spur mit $\tau(\sum a_{kl} u^k v^l) = a_{00}$ (Null-wertiger Fourierskoeff.).

Bew: $\psi_1 \psi_2(u^k v^l) = \delta_{k0} \psi_1(v^l) = \delta_{k0} \delta_{l0} = \psi_2 \psi_1(u^k v^l) \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$

Also ist τ wohldef., linear, positiv, $\tau(1) = 1$, τ treu.

Außerdem $\tau((u^k v^l)(u^m v^n)) = \overline{\lambda}^{lm} \tau(u^{m+k} v^{l+n}) = \delta_{m+k,0} \delta_{l+n,0} \overline{\lambda}^{lm}$

und $\tau((u^m v^n)(u^k v^l)) = \overline{\lambda}^{nk} \delta_{m+k,0} \delta_{n+l,0} \stackrel{=}{=} \overline{\lambda}^{lm}$

$\hookrightarrow (m+k=0 \wedge n+l=0 \Rightarrow (k+n)n=0 \text{ und } l=-n, \text{ also } nk=-mn=lm)$

8.11 Bem: τ ist die eindeutige unitäre Spur auf A_0 , 2. irrational.

Bew: Sei τ' weitere unitäre Spur auf A_0 . Dann

$$\tau'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau'(\frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n u^j x u^{-j}) = \tau'(\psi_1(x)), \text{ ebenso } \tau'(x) = \tau'(\psi_2(x))$$

$$\tau'(u^j x u^{-j}) = \tau'(x)$$

$\hookrightarrow$ Also $\tau'(x) = \tau'(\psi_1 \psi_2(x)) = \tau'(\tau(x)) = \tau(x) \tau'(1) = \tau(x) \quad \forall x \in A_0$

8.12 Satz: A_0 ist einfach, 2. irrational.

Bew: Sei $0 \neq I \triangleleft A_0$ ein Ideal in A_0 . Also ex. $0 \neq x \in I$,
d.h. $0 \neq x^* x \in I$. Dann ist $0 \neq \psi_1(x^* x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n u^j x^* x u^{-j} \in I$

Ebenso $0 \neq \psi_2(x^* x) \in I$. Dann $0 \neq \tau(x^* x) = \underbrace{\psi_1 \psi_2(x^* x)}_{\in I} \in I$,

$\hookrightarrow$ andererseits $\tau(x^* x) \in \mathbb{C} \cdot 1$, also $1 \in I$, d.h. $I = A_0$.

8.13 Frage: Sind die A_0 isomorph für verschiedene $\alpha \in \mathbb{R}$?

Klar: $\gamma \alpha' = \pm \alpha \text{ mod } \mathbb{Z} \Rightarrow A_{\alpha'} \cong A_\alpha$

$\tau e^{2\pi i \alpha} = e^{2\pi i (\alpha + n)} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ und $A_\alpha \cong A_{-\alpha}$ per $u \mapsto v$
 $v \mapsto u$

$\hookrightarrow$ (nach der universellen Eig.)

Man kann sehen, dass auch „ $\Leftarrow$ “ gilt (z.B. mit K-Theorie).

Hierfür wichtig: Bild der Projektoren unter der Spur τ .

Nach in den 60ern war nicht klar, ob $A_{\mathbb{R}}$ projektiv ist oder nicht, d.h. ob nichttriviale Projektionen in $A_{\mathbb{R}}$ existieren.

Zum Vergleich: $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$ ist projektiv, da $\mathbb{T}^2$ zusammenhängend ist.

Kaplansky fragte 1958 nach einem Beispiel einer einfachen, unital, projektiven C^* -Algebra. Das erste Beispiel hierfür wurde erst 1981 von Blackadar geliefert wurde (etwas später, 1982, zeigte Pimsner und Voiculescu ein zweites, natürliches Beispiel, nämlich $C^*_r(\mathbb{F}_2)$, unter Benutzung von K-Theorie).

1981 zeigte Rieffel, dass $A_{\mathbb{R}}$ nicht projektiv ist. Diese sogenannten Pontryagin-Rieffel-Projektionen helfen bei der Frage 8.13.

8.14 Proposition: Zu jedem $\alpha \in (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \cap [0, 1]$ existiert eine Projektion $p_{\alpha} \in A_{\mathbb{R}}$ mit $\tau(p_{\alpha}) = \alpha$, i irrational.

Beweis: o.E. $i \in (0, \frac{1}{2})$. Da $A_{\mathbb{R}}$ einfach ist, ist $A_{\mathbb{R}}$ isomorph

zu $C^*(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) \subseteq \mathcal{L}(L^2(S^1))$ von 8.4. Ist $f \in \mathcal{C}(S^1)$, so ist

der Multiplikationsoperator $M_f \in \mathcal{L}(L^2(S^1))$ gegeben

durch $M_f g = fg$ für $g \in L^2(S^1)$. Dann gilt $M_f \in C^*(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) \forall f \in \mathcal{C}(S^1)$

und $\tau(M_f) = \int_{S^1} f(t) dt$ (wobei dt das auf S^1 normierte Lebesguemaß ist).

Für $z(t) = t$ ist $M_z = \tilde{\nu} \in C^*(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$. Da $M_f M_g = M_{fg}$, $M_f + M_g = M_{f+g}$

$M_f^* = M_{\bar{f}}$ und $\lambda M_f = M_{zf}$, ist also auch $M_f \in C^*(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$ für jedes

Polynom $f = \sum_{j=-n}^n a_j z^j \in \mathcal{C}(S^1)$, also für alle $f \in \mathcal{C}(S^1)$. Somit kann die Spur aus 8.10 auf M_f angewandt werden und es gilt

$$\ll \text{für Polynom } f: \tau(M_f) = \tau\left(\sum_{j=-n}^n a_j z^j\right) = a_0 = \sum_{j=-n}^n a_j \underbrace{\int_{S^1} z(t)^j dt}_{= \delta_{0j}} = \int_{S^1} f(t) dt$$

Idee: Finde Projektion $p = M_f$ mit $\tau(p) = \int f(t) dt = \alpha$.

Problem: p Projektion $\Leftrightarrow f$ Projektion, aber $\mathcal{C}(S^1)$ ist projektiv.

$$(M_f^2 = M_f \Leftrightarrow M_{f^2} = M_f \Leftrightarrow f^2 = f \dots)$$

Lösung: Finde Projektion $p = M_g \tilde{u} + M_f + M_h \tilde{u}^* \in C^*(\tilde{\omega}, \tilde{\nu}) \cong A_{\mathbb{R}}$

$$\text{mit } \tau(p) = \tau(M_f) = \int_{S^1} f(t) dt = \alpha.$$

$$\left(\tau(M_g \tilde{u}) = \tau\left(\sum_{j=-n}^n a_j z^j\right) \stackrel{8.10}{=} 0 \text{ für } g \text{ Polynom, also für alle } g \in \mathcal{C}(S^1) \right)$$

Aus $p=p^\sharp$ folgt dann $M_g \tilde{u} + M_f + M_{\tilde{u}} \tilde{u}^\sharp = M_{\tilde{u}^\sharp} \tilde{u} + M_{\tilde{f}} + M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u}^\sharp$

$\Gamma \tilde{u} M_g = M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u}$, da $(\tilde{u} M_g)f = \tilde{u}(gf)$ und somit $(\tilde{u} M_g)f(t) = g(\lambda t)f(\lambda t)$

Während $(M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u})f(t) = M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g}}(\tilde{u}f)(t) = (\tilde{u}g)(\tilde{u}f)(t) =$

und $\tilde{u}^\sharp M_g = M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u}^\sharp$. Also $(M_g \tilde{u})^\sharp = \tilde{u}^\sharp M_g^\sharp = \tilde{u}^\sharp M_{\tilde{g}} = M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u}^\sharp$

L

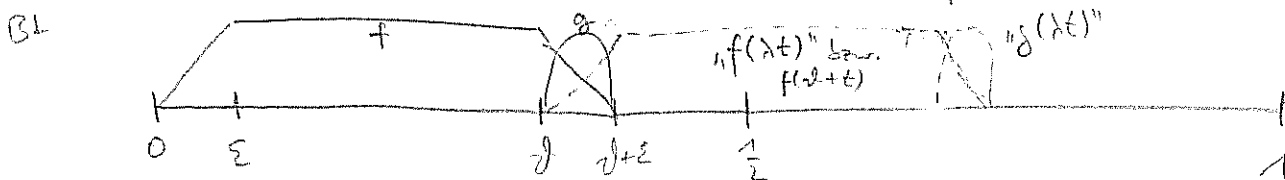
$\|g\|_{Y^1}$
 $\Rightarrow h = \tilde{u}^\sharp \tilde{g}$ und f reellwertig.

Aus $p=p^2$ folgt $M_g \tilde{u} + M_f + M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u}^\sharp = M_{g\tilde{u}^\sharp} \tilde{u}^2 + M_{f\tilde{g} + g\tilde{u}f} \tilde{u}$
 $+ M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g} \tilde{u}^\sharp \tilde{g} + \tilde{g} \tilde{g} + f^2} + M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g} \tilde{u}^\sharp f + f \tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u}^\sharp + M_{\tilde{u}^\sharp \tilde{g} \tilde{u}^\sharp \tilde{g}} \tilde{u}^{\sharp 2}$

$\|g\|_{Y^1}$

$\Rightarrow g\tilde{u}^\sharp(t) = g(t)g(\lambda t) = 0$, $g(t)(1-f(t)-f(\lambda t)) = 0$,
 $f(t)-f(t)^2 = |g(t)|^2 + |g(\lambda t)|^2$

Für $\varepsilon > 0$, sodass $2\varepsilon < \frac{1}{2}$ und unter der Transform. $[0,1] \rightarrow S^1$



eine Lösung ist $\tau(p) = 2\varepsilon$.

Ist nun $\alpha \in \mathbb{Z} + 2\varepsilon\mathbb{Z} \cap [0,1]$, also $\alpha = k + 2\varepsilon l$, so ist

$A_\alpha \leftrightarrow A_{2\varepsilon}$ per $u \mapsto u$, $v \mapsto v^\ell$ und in $A_{2\varepsilon}$ ex. p_α mit $\tau^{(2\varepsilon)}(p_\alpha) = \alpha$.

Aber $\tau^{(2\varepsilon)}|_{A_\alpha}$ ist eine Spur auf A_α , nach 8.11 also $\tau^{(2\varepsilon)}(p_\alpha) = \tau^{(\alpha)}(p_\alpha) = \alpha$

L für $p_\alpha \in A_\alpha \subseteq A_{2\varepsilon}$.

8.15 Bemerkung: Haben gezeigt: $\tau(\text{Proj. in } A_{2\varepsilon}) \supseteq \mathbb{Z} + 2\varepsilon\mathbb{Z} \cap [0,1]$.

Man kann sogar "=" zeigen (aufwändig).

Also $2\varepsilon' = \pm 2\varepsilon \pmod{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow A_{2\varepsilon'} \cong A_{2\varepsilon}$

Bew: " $\Rightarrow$ " s. 8.13 " $\Leftarrow$ " Sei $\varphi: A_{2\varepsilon'} \xrightarrow{\cong} A_{2\varepsilon}$, $p \in A_{2\varepsilon'}$ mit $\tau^{(2\varepsilon')}(p) = 2\varepsilon'$.

Dann $\tau^{(2\varepsilon')} \circ \varphi = \tau^{(2\varepsilon)}$ nach 8.11, also $2\varepsilon' = \tau^{(2\varepsilon)}(\varphi(p)) \in \tau^{(2\varepsilon)}(\text{Proj. in } A_{2\varepsilon})$

d.h. $2\varepsilon' = \pm 2\varepsilon \pmod{\mathbb{Z}}$.

$\mathbb{Z} + 2\varepsilon\mathbb{Z} \cap [0,1]$

L