# $C^*$-Algebren

## Vorwort / Motivation

Appetizer:

- Gelfand und Neumark schrieben 1943 einen Artikel, der „das Antlitz der modernen Analysis veränderte". Zusammen mit den Artikeln von Murray und von Neumann (1936-1943) legen sie somit den Grundstein für eine „nichtkommutative Analysis".
(Dick Kadison, 1994 in „$C^*$-Algebras 1943-1993, a fifty year celebration")
- Die Theorie der Operatoralgebren (also Algebren von Operatoren auf einem Hilbertraum, versehen mit einem gewissen Abschluss) sei wichtig u.a. für einen quantenmechanischen Formalismus, für Gruppendarstellungen und für abstrakte Ringtheorie, prognostizierten Murray und von Neumann 1936. All dies traf ein und es haben sich noch viele weitere Anwendungsgebiete aufgetan. In gewisser Weise sind Operatoralgebren nämlich eine besonders gelungene unendlichdimensionale Verallgemeinerung von Matrixalgebren.
(aus dem Vorwort von Sakai, „$C^*$-Algebras and $W^*$-Algebras")
- Die Theorie der $C^*$-Algebren (oder allgemeiner der Operatoralgebren) kann u.a. als das Studium von Operatoren auf einem Hilbertraum mit algebraischen Methoden angesehen werden.
(aus dem Vorwort von Pedersen, „$C^*$-algebras and their autom. groups")

- $C^*$-Algebren haben tiefe Verbindungen mit Darstellungstheorie (von Gruppen), harmonischer Analysis, Operatortheorie, Differentialgeometrie, algebraischer Topologie, K-Theorie, Indextheorie, Quantenphysik etc.

(aus dem Vorwort von C*-Algebras 1943-1993, a fifty year celebration)

Sie sind eine spezielle Klasse von Banachalgebren, die den „richtigen" Rahmen für die Beschreibung von Fragen von der Gruppentheorie bis zur statistischen Physik bieten.

(aus R. Speichers Skript aus den 90ern)

(zur physikalischen Anwendung siehe die Einleitungen von Bratteli, Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I & II)

Konzept:

Anstatt einen Raum $X$ zu studieren, betrachte die Algebra der Funktionen über diesem Raum und versuche Rückschlüsse über $X$ zu ziehen.

Auf die Topologie angewandt bedeutet das:

$$X \longleftrightarrow \mathcal{C}(X)$$

(kompakter) topol. Raum — Algebra der stetigen Funktionen über $X$

Folgende Informationen korrespondieren unter dieser Dualität:

(siehe die Einleitung zu Kap 1 und am Ende von Abschnitt 1.3 von Gracia-Bondia, Várilly, Figueroa, Elements of noncommutative geometry)

(oder Wegge-Olsen, 1.11)

| Topologie | Algebra |
| --- | --- |
| kompakt | unital |
| offene Teilmenge | (abgeschlossenes) Ideal |
| abgeschlossene Teilmenge | Quotientenalgebra |
| metrisierbar | separabel |
| zusammenhängend | projektionslos |
| ... | ... |

Welche axiomatischen Eigenschaften hat $\mathcal{C}(X)$, wenn $X$ (lokal-)kompakt ist? Gelfand und Neumark extrahierten diese. Lässt man die Kommutativität der Elemente ($fg = gf$) beiseite $\rightsquigarrow$ $C^*$-Algebren.
$C^*$-Algebren sind also nichtkommutative Analoga von Funktionenalgebren und insofern „nichtkommutative Topologie".

Ein anderer Weg, um $C^*$-Algebren zu motivieren:
Sei $H$ ein Hilbertraum, $\mathcal{L}(H)$ die beschränkten Operatoren auf $H$. Betrachte eine Unteralgebra von Operatoren auf $H$. Wie lässt sich diese abschließen?

- Normtopologie $\rightsquigarrow$ $C^*$-Algebren
- starke Operatortopologie } $\rightsquigarrow$ Von-Neumann-Algebren
- schwache Operatortopologie }

Beide Charakterisierungen von $C^*$-Algebren stimmen überein!

Ziele der Vorlesung sind u.a.:

- „1. Fundamentalsatz der $C^*$-Algebren": Ist $A$ eine $C^*$-Algebra mit Eins und ist $A$ kommutativ, so gilt $A \cong \mathcal{C}(X)$ für einen kompakten Raum $X$.
- „2. Fundamentalsatz der $C^*$-Algebren": Jede (abstrakt definierte) $C^*$-Algebra ist isomorph zu einer normabgeschlossenen Unteralgebra von Operatoren auf einem Hilbertraum.

Literatur:

- hauptsächlich ein Skript von J. Cuntz
- Dixmier (klassisch)
- Murphy (klassisch)
- Davidson (Beispiele)
- Blackadar (modern)
- weiteres von der Liste

Skript: online