§1 Topologische Konzepte auf Vektorräumen

Hierarchie der Informationen über „Lage" und „Konvergenz":

- Topologie (auf Mengen, später VRe) – „Gestalt der Ränder", Mindestvoraussetzung für Stetigkeit
- $\Uparrow$
- Metrik (Menge) – Abstände
- $\Uparrow$
- Norm (VRe) – Skala für Abstände von 0

1.1 <u>Definition</u>: Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt <u>Topologie</u> auf X, falls

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

(iii) $\mathcal{M} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{V \in \mathcal{M}} V \in \tau$

Die Elemente $U \in \tau$ heißen <u>offen</u>; $A \subseteq X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls A^c offen ist.

Ist $Y \subseteq X$, so heißt $\overline{Y} := \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschl.} \\ Y \subseteq A}} A$ der <u>Abschluss</u> von Y.

$N \subseteq X$ heißt <u>Umgebung</u> von $x \in X$, falls es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt, so dass $x \in U \subseteq N$.

1.2 <u>Bemerkung</u>: (a) Ist (X, d) ein <u>metrischer</u> Raum (d.h. $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$) so bilden die Mengen $\mathcal{M} \subseteq X$ mit: $\forall a \in \mathcal{M}\ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{B(a,\varepsilon)}_{:= \{x \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\}} \subseteq \mathcal{M}$ eine Topologie auf X.

(b) $V \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow$ V ist Umgebung für alle $x \in V$

[„$\Rightarrow$" ✓ „$\Leftarrow$" $V = \bigcup_{x \in V} U_x$, wobei $x \in U_x \subseteq V$ offen

(c) $Y \subseteq X$. $z \in \overline{Y} \Leftrightarrow N \cap Y \neq \emptyset$ für jede Umgebung N von z

[$z \in \overline{Y} \Leftrightarrow z \in A\ \forall A \supseteq Y$ abgeschl. $\Leftrightarrow$ ist U offen mit $U \cap Y = \emptyset$, so ist $z \notin U$
$\Leftrightarrow$ für alle offenen U gilt: ist $z \in U$, so ist $U \cap Y \neq \emptyset$

Mit Hilfe von Topologien können wir Stetigkeit definieren, die mit unserer Vorstellung aus metrischen Räumen übereinstimmt.

1.3 <u>Definition</u>: Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt <u>stetig</u> in $x \in X$, falls

$$\forall N \subseteq Y \text{ Umgebung von } f(x):\ f^{-1}(N) \subseteq X \text{ ist Umgebung von } x$$

f heißt <u>stetig</u>, falls stetig in allen $x \in X$.

1.4 <u>Proposition</u>:

(a) X, Y topol. Dann: $\quad f: X \to Y$ stetig $\iff \forall U \subseteq Y$ offen: $f^{-1}(U)$ offen

(b) X, Y metr. Dann: $\quad f: X \to Y$ stetig $\iff \forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$

⌜<u>Beweis</u>: (a) „$\Leftarrow$" Ist $x \in X$ und $N \subseteq Y$ Umgebung von $f(x)$ (o.E. offen), so ist $f^{-1}(N)$ offen und $x \in f^{-1}(N)$.

„$\Rightarrow$" Sei $U \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. Also ist U Umgebung für $f(x)$ nach 1.2. Nach Definition ist dann $f^{-1}(U)$ Umgebung von $x \overset{1.2}{\Rightarrow} f^{-1}(U)$ offen.

(b) „$\Rightarrow$" Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann ist $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ Umgebung von x, d.h. es ex. ein $\delta > 0$, so dass $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$.

„$\Leftarrow$" Ist N eine Umgebung von $f(x)$, so ex. $\varepsilon > 0$ mit $B(f(x),\varepsilon) \subseteq N$. Somit ex. ein $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subseteq f^{-1}(N)$

D.h. $f^{-1}(N)$ ist Umgebung von x.

⌞

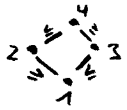
Während man Stetigkeit in metrischen Räumen auch mit Folgen beschreiben kann, benötigt man in topologischen Räumen Netze.

1.5 <u>Definition</u>: Eine Menge Λ heißt <u>geordnet</u>, falls sie eine Relation $\leq$ besitzt, so dass gilt:

(i) $\lambda \leq \lambda$, (ii) $\lambda \leq \mu, \mu \leq \lambda \Rightarrow \lambda = \mu$, (iii) $\lambda \leq \mu, \mu \leq \nu \Rightarrow \lambda \leq \nu$

Λ heißt <u>gerichtet</u> oder <u>filtrierend</u>, falls außerdem noch gilt:

(iv) $\forall \lambda, \mu \in \Lambda\ \exists \nu \in \Lambda: \lambda \leq \nu, \mu \leq \nu$

1.6 Bemerkung: Im Allgemeinen sind in Λ zwei beliebige Elemente nicht vergleichbar (z.B. ).

1.7 Definition: Sei X ein topol. Raum, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X$ und Λ gerichtet, geordnet.
Dann heißt $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz.
Das Netz konvergiert gegen $x \in X$, falls es für jede Umgebung N von x ein $\lambda_0 \in \Lambda$ gibt, so dass $x_\lambda \in N$ $\forall \lambda \geq \lambda_0$.

1.8 Beispiel: Sei Λ die Menge aller Partitionen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Also Λ gerichtet, geordnet per $\lambda \geq \mu :\Leftrightarrow \lambda$ ist feinere Partition als μ.
Dann ist $s_\lambda := \sum_{t_i \in \lambda} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$ ein Netz, das gegen $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergiert.

1.9 Bemerkung: (a) $x_\lambda \to x$, $x_\lambda \to x'$ ist möglich, z.B. mit $\tau = \{X, \emptyset\}$, $|X| \geq 2$.

(b) X topol., $Y \subseteq X$. Dann ist $\overline{Y}$ genau die Menge aller Netzgrenzwerte in Y.

„$\supseteq$" $(x_\lambda) \subseteq Y$ Netz, $x_\lambda \to z$. Sei N Umgebung von z, also ex. $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x_\lambda \in N$ $\forall \lambda \geq \lambda_0$. Somit ist jedoch $N \cap Y \neq \emptyset$, d.h. $z \in \overline{Y}$ (1.2).

„$\subseteq$" Ist $z \in \overline{Y}$, so betrachten wir die Menge $\mathcal{U}$ aller Umgebungen von z. $\mathcal{U}$ ist geordnet per $U \geq U' :\Leftrightarrow U \subseteq U'$ und gerichtet ($U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2$).
Zu $U \in \mathcal{U}$ wähle $x_U \in U \cap Y \underset{1.2}{\neq} \emptyset$. Dann $x_U \to z$.

(c) $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ ($x_\lambda \to x$, $x_\lambda \in A$ $\forall \lambda \Rightarrow x \in A$)

(d) Ist $f : X \to Y$ eine Abb. zwischen topologischen Räumen, so gilt:

f stetig in $x \in X$ $\Leftrightarrow$ für jedes Netz $(x_\lambda) \subseteq X$ mit $x_\lambda \to x$ gilt $f(x_\lambda) \to f(x)$

[Beweis Übungsaufgabe

1.10 Definition: Sei (X,d) metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: d(x_n,x_m)<\varepsilon\ \forall n,m\geq N$.
X heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

1.11 Beispiel: (a) Betrachte $X=(0,1)$ mit der üblichen Metrik $d(x,y)=|x-y|$. Dieser Raum ist nicht vollständig.

(b) Betrachte $X=(0,1)$ mit einer Metrik, die X bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. Dann ist (X,d) vollständig.

Der Begriff der Vollständigkeit hängt also von (X,d) ab, nicht nur von X!

Im Folgenden wird es wichtig sein zu verstehen, wie ein Raum vervollständigt werden kann und wie man Abbildungen fortsetzt.

1.12 Satz: Ist (X,d) ein metrischer Raum, so existiert ein eindeutig (bis auf Isometrie) bestimmter vollständiger metrischer Raum $(\hat{X},\hat{d})$ mit einer isometrischen Einbettung $i: X\to\hat{X}$ (d.h. $\hat{d}(i(x),i(y))=d(x,y)$), so dass $\overline{i(X)}=\hat{X}$.

Eine Abbildung $\varphi: X\to Y$ zwischen metrischen Räumen mit $d_Y(\varphi(x),\varphi(y))\leq C\, d_X(x,y)\ \forall x,y\in X$, $C\geq 0$ fest lässt sich auf eindeutige Weise zu einer stetigen Abbildung $\hat{\varphi}:\hat{X}\to Y$ fortsetzen, sofern Y vollständig ist.

⌈**Beweis:** 1.) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\sim(x_n')_{n\in\mathbb{N}} \;:\Longleftrightarrow\; d(x_n,x_n')\to 0$

$\hat{X}:=\{[(x_n)]\mid (x_n) \text{ ist Cauchyfolge in } X\}$

$\hat{d}([(x_n)],[(y_n)]):=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$

$i: X\to\hat{X}$
$x\longmapsto[(x,x,\dots)]$

Überprüfe hierzu, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Cauchyfolgen ist und dass der Limes $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sowie dass $\hat{d}$ eine Metrik ist.

Π $d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \underbrace{d(x_n,x_m)}_{<\varepsilon} + d(x_m,y_m) + \underbrace{d(y_m,y_n)}_{<\varepsilon} - d(x_m,y_m) < 2\varepsilon$ für $n,m \ge N$

und ebenso $-2\varepsilon < d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m) \Rightarrow (d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\mathbb{R}$ $\sqcup$

Die Abbildung i ist isometrisch, da $\hat{d}(i(x),i(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y)$.

Es gilt $\overline{i(X)} = \hat{X}$, denn für $[(x_n)] \in \hat{X}$ ist $i(x_n) \to [(x_m)]$, $n\to\infty$.

Sei nämlich $\varepsilon>0$. Dann: $\hat{d}(i(x_n),[(x_m)]) = \lim_{k\to\infty}(x_n,x_k) < \varepsilon$ für $n \ge N$

b.z.z.: $\hat{X}$ ist vollständig.

Idee: Bastle eine günstige Diagonalfolge.

Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\hat{X}$, also $\alpha_n = [(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}]$.

Man kann α_n durch beliebige Teilfolgen von $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ repräsentieren, da: „(a_n) Cauchy, (b_n) Teilfolge $\Rightarrow d(a_n,b_n)\to 0$"

Sei daher ohne Einschränkung $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass $d(x_k^n, x_{k+l}^n) < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Durch Übergang zu einer Teilfolge von (α_n) auch $\hat{d}(\alpha_n,\alpha_{n+l}) < \frac{1}{2^{n+1}}$

Wähle nun $y_n = x_{k(n)}^n$ mit $k(n)\ge n$ und $d(y_n,y_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$.

Π $y_1 := x_1^1$. Ist y_n gewählt, so ist $\hat{d}(\alpha_n,\alpha_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}$, also ex. $l \ge k(n)+1$ mit $d(x_l^n, x_l^{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Setze $y_{n+1} := x_l^{n+1}$.

Dann $d(y_n,y_{n+1}) \le \underbrace{d(x_{k(n)}^n, x_l^n)}_{< \frac{1}{2^{k(n)+1}} \le \frac{1}{2^{n+1}}} + \underbrace{d(x_l^n, x_l^{n+1})}_{< \frac{1}{2^{n+1}}} < \frac{1}{2^n}$

$\sqcup$

Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in X, d.h. $[(y_n)] \in \hat{X}$.

Außerdem $\alpha_m \to [(y_n)]$, $m\to\infty$

Π Sei $\varepsilon>0$. Sei N, so dass $\frac{2}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Sei $m \ge N$.

Dann $\hat{d}(\alpha_m,[(y_n)]) < \varepsilon$, denn für $l \ge m$ ist

$d(x_l^m, y_l) \le \underbrace{d(x_l^m, x_{k(m)}^m)}_{< \frac{1}{2^{\min(l,k(m))+1}}} + \underbrace{d(y_m, y_l)}_{< \frac{1}{2^{m-1}} \le \frac{1}{2^{N-1}}} < \varepsilon$

$\sqcup$

2.) $\hat{\varphi}([(x_n)]) := \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$

Dies ist wohldefiniert, da $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in Y ist.
$\hat{\varphi}$ ist stetig und eindeutig.

Ist $[(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}] \to [(x_n)]$, $k\to\infty$. Dann

$$d(\hat{\varphi}([(x_n^k)]), \hat{\varphi}([(x_n)])) = \underbrace{d(\hat{\varphi}([(x_n^k)]), \varphi(x_n^k))}_{<\varepsilon} + \overbrace{d(\varphi(x_n^k), \varphi(x_n))}^{\leq\varepsilon} + \underbrace{d(\varphi(x_n), \hat{\varphi}([(x_n)]))}_{<\varepsilon}$$

Und ist φ' weitere Fortsetzung, so gilt:

$$\hat{\varphi}([(x_n)]) \leftarrow \varphi(x_k) = \varphi'([(x_k, x_k, x_k, \ldots)]) \to \varphi'([(x_n)])$$
$$\parallel$$

3.) Als Spezialfall der Konstruktion in 2.) kann man zeigen, dass $\hat{X}$ und $\overline{X}$ isomorph sind, wenn $X \subseteq Y$ und Y ein vollst. metr. Raum ist. (Ist X also in einen größeren Raum eingebettet, so ist die Vervollständigung gleich dem Abschluss) (Übungsaufgabe)

Ist dann (Y, d_Y) ein weiterer vollst. metr. Raum mit isometr. Einbettung $i: X \to Y$, $\overline{i(X)} = Y$, so setzt sich i nach 2.) zu $\hat{i}: \hat{X} \to Y$ fort und $Y = \overline{i(X)} \cong \widehat{i(X)} \cong \hat{X}$.

$\llcorner$

1.13 Beispiel: (a) $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{C}[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$

$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$, $\quad d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty$

$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt$, $\quad d_1(f,g) := \|f-g\|_1$

Dann ist $(\mathcal{C}[0,1], d_\infty)$ vollständig, $(\mathcal{C}[0,1], d_1)$ aber nicht.

$\widehat{(\mathcal{C}[0,1], d_1)} = L^1([0,1], \lambda)$

1.14 Definition: Sei X ein $\mathbb{K}$-VR ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) mit einer Topologie. X heißt topologischer Vektorraum, falls
$$+ : X \times X \longrightarrow X,\ (x,y) \longmapsto x+y \quad \text{und} \quad \mu : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X,\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$
stetig sind.

1.15 Bemerkung: (a) Stetigkeit der Addition bedeutet:
$$x_\lambda \to x,\ y_\mu \to y \Rightarrow x_\lambda + y_\mu \to x+y \quad (\Lambda \times M \text{ mit } (\lambda', \mu') \geq (\lambda, \mu) :\Leftrightarrow \lambda' \geq \lambda, \mu' \geq \mu)$$
(b) Ist X ein topol. VR und $Y \subseteq X$ ein Unter-VR, so ist $\bar{Y} \subseteq X$ ebenfalls ein Unter-VR ($x, y \in \bar{Y} \Rightarrow \underbrace{x_\lambda + y_\mu}_{\in Y} \to x+y \Rightarrow x+y \in \bar{Y}$)

1.16 Satz: Seien X, Y topol. VRe, $T : X \to Y$ linear.
Dann sind äquivalent: (i) T ist stetig (in allen Punkten)
(ii) T ist stetig in einem Punkt
(iii) T ist stetig in 0

⌈Beweis: (ii) ⇒ (i): Sei T stetig in $z \in X$. Sei $x_\lambda \to x$
$$\overset{\text{Add. stetig}}{\Longrightarrow} x_\lambda + (z-x) \to z \Rightarrow Tx_\lambda = \underbrace{T(x_\lambda + z - x)}_{\to Tz} - T(z-x) \longrightarrow Tx$$
⌊

1.17 Definition: Sei X ein $\mathbb{K}$-VR. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt Norm, falls
(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in X$
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ „Dreiecksungleichung"
(iv) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
Ohne (iv) heißt $\|\cdot\|$ Halbnorm.

1.18 Bemerkung: Jeder normierte VR ist ein topologischer VR, mit der von der Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ induzierten Topologie.
$(x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow d(x+y, x_n+y_n) = \|x+y-x_n-y_n\| \leq \|x-x_n\| + \|y-y_n\| \to 0)$
Diese Metrik ist translationsinvariant ($d(x+z, y+z) = d(x,y)$) und die Norm ist als Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ stetig.

1.19 Beispiel: (a) $X = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{„euklidische Norm"}$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

(b) Sei K kompakter, topol. Raum. $X = \mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in K\}$$

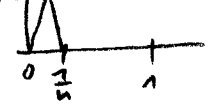
(c) Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\mu) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \|f\|_p < \infty\}, \quad \|f\|_p := \left(\int |f(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^\infty(\mu) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \exists C \geq 0 : \{t \mid |f(t)| > C\} \text{ Nullmenge}\} \quad \|f\|_\infty^{\mathbb{R}} := \inf\{C \mid \{t \mid |f(t)| > C\} \text{ Nullmenge}\}$$

1.20 Bemerkung: Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen äquivalent, falls es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, so dass $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$.
In diesem Fall sind $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ topologisch isomorph, denn $id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ ist dann bijektiv und beidseitig stetig. Die Normen erzeugen dann die selben Topologien, denn z.B. $x_n \to x$ in $(X, \|\cdot\|_1) \Rightarrow \|x_n - x\|_2 \leq C\|x_n - x\|_1 \to 0$, d.h. $x_n \to x$ in $(X, \|\cdot\|_2)$.

Man kann zeigen, dass die Normen aus (a) äquivalent sind, mehr noch, alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind äquivalent.
Insofern gibt es nur einen normierten $\mathbb{K}$-VR der Dimension n.
Im Unendlichdimensionalen ist das falsch!
Betrachte $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ wie in Bsp. 1.13.
Dann $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \, dt = \|f\|_\infty$, aber es gibt keine Konstante $C > 0$ mit $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$.

Bsp.: $f_n =$ 

Dann $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$, aber $\|f_n\|_\infty \equiv 1$.

D.h. $1 = \|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1 = \frac{C}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (↯)

1.21 Satz: Seien X, Y normierte Räume, $T: X \to Y$ linear.
Dann ist äquivalent: (i) T ist stetig
(ii) $\exists C \geq 0 \; \forall x \in X: \quad \|Tx\| \leq C\|x\|$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): $\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \to 0$ falls $x_n \to x$
(i) $\Rightarrow$ (ii): Da T stetig in 0 ist, ex. $\delta > 0$ zu $\varepsilon = 1$ mit
$\|Ty\| \leq 1$ für alle $\|y\| \leq \delta$. Setze $C := \frac{1}{\delta}$. Dann ist
$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta} \|T(\delta \frac{x}{\|x\|})\| \leq \frac{\|x\|}{\delta} = C\|x\|$

1.22 Definition: Sei $T: X \to Y$ linear zwischen normierten Räumen.
$\|T\| := \inf\{C \geq 0 \mid \|Tx\| \leq C\|x\| \; \forall x \in X\} \in [0, \infty]$ „Operatornorm"
T heißt beschränkt, falls $\|T\| < \infty$.

Satz 1.21 sagt uns also, dass lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen stetig sind genau dann, wenn sie beschränkt sind.

Wir schreiben $\mathcal{L}(X,Y) := \{T: X \to Y \text{ linear, beschränkt}\}$
$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$
$X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ „Dualraum von X"

1.23 Proposition: Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, wobei X, Y normierte Räume sind.

(a) $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \quad \forall x \in X$
(b) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$
(c) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\}$
(d) $\|T\| = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \neq 0\}$

Bew.: (a) $\|Tx\| \leq C_n\|x\|$ mit $C_n \searrow \|T\|$
(b) $\alpha := \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\} \overset{(a)}{\leq} \|T\|$. Und $\|Ty\| = \|y\| \cdot \|T(\frac{y}{\|y\|})\| \leq \alpha\|y\|$
$\Rightarrow \|T\| \leq \alpha$

1.22 Definition: Ein Banachraum ist ein normierter VR, der (bzgl. der von der Norm induzierten Topologie) vollständig ist.

1.23 Beispiel: (a) $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ wie in 1.19 ist vollständig
(Der Grenzwert gleichmäßig konvergierender Funktionenfolgen ist wieder stetig.)

(b) $L^p(\mu)$ aus 1.19 ist ein Banachraum für $1 \le p \le \infty$

(c) Jeder endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-VR ist vollständig.
(Denn $\mathbb{R}^n$ ist vollständig und Bem. 1.20)

1.24 Satz: Seien X, Y normierte Räume. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ mit der Norm aus Def. 1.22 ein normierter VR (d.h. $\|\cdot\|$ ist wohldef. eine Norm). Ist Y ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X,Y)$ sogar ein Banachraum.

⌈**Beweis:** $\|(S+T)x\| \le \|Sx\| + \|Tx\| \le \|S\| + \|T\| \quad \forall \|x\|=1 \Rightarrow \Delta$-Ungl. für $\|\cdot\|$

$\|(\lambda T)x\| = |\lambda| \|Tx\|$, $\quad \|T\| = 0 \Leftrightarrow \|T\| = 0 \quad \Rightarrow \|\cdot\|$ ist eine Norm.

Sei nun Y vollständig und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X,Y)$.

Dann ist $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in Y $\forall x \in X$ $\left(\|T_n x - T_m x\| \underset{1.23}{\le} \underbrace{\|T_n - T_m\|}_{\to 0} \|x\| \right)$.

Also ex. $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ in Y und $S: X \to Y$, $Sx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ ist wohldef.

S ist linear, da $S(\lambda x + \mu y) \leftarrow T_n(\lambda x + \mu y) = \lambda T_n x + \mu T_n y \to \lambda Sx + \mu Sy$

$T_n \to S$: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\| < \varepsilon \quad \forall n,m \ge N$

Zu $x \in X$ mit $\|x\| = 1$

wähle $m(x) \ge N$ mit $\|(S - T_{m(x)})x\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|(S-T_n)x\| \le \|(S - T_{m(x)})x\| + \|T_{m(x)} - T_n\| \|x\| < 2\varepsilon$, $\quad n \ge N$

$\Rightarrow \|S - T_n\| < 2\varepsilon$

S ist stetig, da $S = \underset{\text{stetig}}{T_N} + \underbrace{(S - T_N)}_{\text{stetig mit } \|S - T_N\| < 2\varepsilon}$
⌊

1.25 Korollar: Der Dualraum X' ist ein Banachraum.

1.26 Proposition: Ist X norm. VR, so ist die Vervollständigung $\hat{X}$ ein Banachraum.

Ist $T: X \to Y$ linear, stetig und Y ein Banachraum, so ex. eine eindeutig bestimmte stetige, lineare Fortsetzung $\hat{T}: \hat{X} \to \hat{Y}$ mit $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

⌈**Beweis:** $\hat{X}$ ist normierter VR per $\lambda[(x_n)] + \mu[(x_n)] := [(\lambda x_n + \mu y_n)]$ und $\|[(x_n)]\| := \lim \|x_n\|$. (Da $\hat{d}([(x_n)],[(y_n)]) = \|[(x_n)] - [(y_n)]\|$) für die Metrik $\hat{d}$ aus 1.12, ist $\hat{X}$ mit dieser Norm vollständig.

Da $d(Tx, Ty) = \|Tx - Ty\| \leq \|T\| d(x,y)$, ex. $\hat{T}$ nach 1.12.

⌊ Man prüft nach, dass $\hat{T}$ auch linear ist und $\|T\| = \|\hat{T}\|$ gilt.

1.27 Proposition: $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z) \Rightarrow \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$

[**Beweis:** $\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\| \quad \forall \|x\| = 1$

1.29 Definition: Sei E ein normierter VR und $F \subseteq E$ ein linearer Teilraum. $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in F$

$E/_F := \{\dot{x} \mid x \in E\}$ „Quotientenraum", wobei $\dot{x}$ Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$

$\|\dot{x}\| := \inf\{\|y\| \mid y \sim x\} = \inf\{\|x+z\| \mid z \in F\}$

1.30 Satz: Sei E norm. VR, $F \subseteq E$ ein lin. TR.

(a) $E/_F$ ist VR mit $\dot{x} + \dot{y} = (x+y)^\cdot$, $\lambda\dot{x} = (\lambda x)^\cdot$

(b) $\|\cdot\|$ ist eine Halbnorm auf $E/_F$ und eine Norm genau dann, wenn F abgeschlossen ist.

(c) Ist F abgeschlossen, so ist $E \xrightarrow[x \mapsto \dot{x}]{} E/F$ stetig, linear mit Norm kleiner gleich 1 und bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

(d) Ist F abgeschlossen und E ein Banachraum, so ist auch $E/_F$ ein Banachraum.

1.28 Lemma: In einem Banachraum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.

⌈**Beweis:** Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \in X$ und $\sum^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Dann ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy,

⌊ denn $\|S_n - S_m\| = \|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| < \varepsilon$ für $n > m \geq N$. Also (S_n) konvergent.

⌈**Beweis**: (a) wohldef., da $(x+F)+(y+F)=(x+y)+F$

(b) Seien $z_1, z_2 \in F$, so dass $\|\dot{x}\|+\varepsilon = \|x+z_1\|$, $\|\dot{y}\|+\varepsilon = \|y+z_2\|$.

Dann $\|\dot{x}+\dot{y}\| \leq \|(x+y)+(z_1+z_2)\| \leq \|x+z_1\|+\|y+z_2\| = \|\dot{x}\|+\|\dot{y}\|+2\varepsilon$

Ebenso $\|\lambda\dot{x}\| = |\lambda|\,\|\dot{x}\|$.

Und $\|\dot{x}\|=0 \iff \exists (z_n)\subseteq F : \|x+z_n\|\to 0 \iff x\in\overline{F}$

Sei also F abgeschlossen. Dann folgt aus $\|\dot{x}\|=0$: $x\in\overline{F}=F$, d.h. $\dot{x}=0$.

Ist hingegen $\|\dot{\cdot}\|$ eine Norm, so folgt aus $x\in\overline{F}$: $\|\dot{x}\|=0$, d.h. $x\in F$

Also $F\subseteq\overline{F}\subseteq F$, d.h. F ist abgeschlossen.

(c) Da $\|\dot{x}\|\leq\|x\|$, ist die Quotientenabb. stetig mit Norm ≤ 1.

Sei $V\subseteq E$ offen. Sei $\dot{x}\in\dot{V}$. bzz. (für 1.2) $\exists\varepsilon>0$, so dass $B(\dot{x},\varepsilon)\subseteq\dot{V}$

O.E. $x\in V$. Also ex. $\varepsilon>0$ mit $B(x,\varepsilon)\subseteq V$. Sei nun $\dot{z}\in B(\dot{x},\varepsilon)$,

d.h. $\|(z-x)^{\cdot}\|<\varepsilon$, so mit ex. $w\in F$ mit $\|z-x+w\|<\varepsilon$,

d.h. $z+w\in B(x,\varepsilon)\subseteq V \Rightarrow \dot{z}=(z+w)^{\cdot}\in\dot{V}$

(d) Sei $(\dot{x}_n)$ eine Cauchyfolge in E/F. O.E. (sonst Teilfolge) $\|\dot{x}_{n+1}-\dot{x}_n\|<2^{-(n+1)}$

Also ex. $a_n\in E$ mit $\|a_n\|<2^{-n}$ und $\dot{a}_n=\dot{x}_{n+1}-\dot{x}_n$.

Dann konvergiert $s_n:=\sum_{k=1}^n a_k$ absolut, nach Lemma 1.28 konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also in E. Setze $z_{n+1}:=x_1+\sum_{k=1}^n a_k$ $(z_1:=x_1)$

Dann $\dot{z}_n=\dot{x}_n$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $z\in E$.

⌊ $\Rightarrow \dot{z}_n\to\dot{z}$, d.h. $(\dot{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Eine Norm auf einem Vektorraum zu haben ist eine schöne Sache, da sie unserer Vorstellung von „gleichmäßiger Konvergenz" entspricht. Um auch „punktweise Konvergenz" allgemeiner zu verstehen, ist es sinnvoll lokalkonvexe Vektorräume zu untersuchen.

1.31 Definition: Sei X ein $\mathbb{K}$-VR und $\mathcal{P}$ eine Familie von Halbnormen auf X. X heißt <u>lokalkonvexer Vektorraum</u>, falls X ein topologischer Vektorraum mit folgender Topologie ist.

$$U \subseteq X \text{ offen } :\iff \forall x \in U\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}\ \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0 : B_{p_1}(x, \varepsilon_1) \cap \dots \cap B_{p_n}(x, \varepsilon_n) \subseteq U$$

wobei $B_{p_i}(x, \varepsilon) := \{ y \in X \mid p_i(x-y) < \varepsilon \}$

1.32 Bemerkung: (a) Ist $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz in X, so gilt

$$x_\lambda \to x \iff p(x_\lambda - x) \to 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$$

(b) Jede Halbnorm $p \in \mathcal{P}$ ist stetig ($x_\lambda \to x \Rightarrow p(x_\lambda - x) \to 0$)

(c) Zu $\mathcal{P}$ können beliebig viele stetige Halbnormen hinzugefügt werden, ohne die Topologie (also auch ohne die Konvergenz und die Grenzwerte von Netzen) zu verändern. Insbesondere existiert eine maximale Familie von Halbnormen (nämlich alle stetigen Halbnormen), die eine gegebene lokalkonvexe Topologie definiert.

(d) X Hausdorffsch (je zwei verschiedene Punkte besitzen disjunkte Umgebungen) genau dann, wenn $\forall x \neq 0\ \exists p \in \mathcal{P} : p(x) > 0$.

„$\Rightarrow$" Das Netz $x_\lambda := x$ konvergiert gegen x. Wäre $p(x) = 0\ \forall p \in \mathcal{P}$, so konvergierte (x_λ) gegen 0 nach (a). Nach Blatt 1 $x_\lambda \underset{\to 0}{\overset{\to x}{}} \Rightarrow x = 0$.

„$\Leftarrow$" Gäbe es $x_\lambda \underset{\to y}{\overset{\to x}{}}$ mit $x \neq y$, so gäbe es ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p(x-y) > 0$. Dann ist jedoch p nicht stetig, da $p(x_\lambda - y) \underset{\to p(x-y) \neq 0}{\overset{\to 0}{}}$ ↯ (zu (b))

1.33 Beispiel: $X = \mathcal{C}^\infty([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ unendl. oft differenzierbar} \}$ mit $p_k(f) := \|f^{(k)}\|_\infty$, wo $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f ist. In diesem lokalkonvexen Raum ist $f_n \to f \iff f_n^{(k)} \to f^{(k)}\ \forall k$, d.h. gleichmäßige Konvergenz aller Ableitungen.

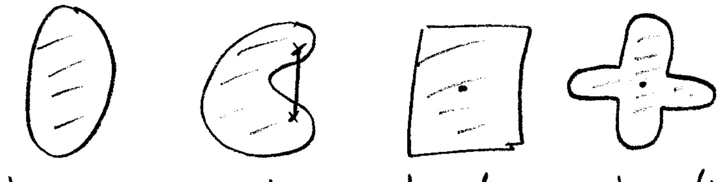
1.34 Definition: Sei X ein $\mathbb{K}$-VR, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) M heißt konvex, falls $\forall x,y \in M \ \forall t \in [0,1]: \ tx + (1-t)y \in M$

(b) M heißt kreisförmig, falls $\forall x \in M \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1: \ \lambda x \in M$

(c) M heißt absorbierend, falls $\forall x \in X \ \exists \lambda > 0: \ \lambda x \in M$

1.35 Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$:



konvex | nicht konvex | kreisförmig konvex | kreisförmig nicht konvex

1.36 Bemerkung: In einem lokalkonvexen VR ist $\bigcap_{k=1}^{n} B_{p_k}(0,\varepsilon_k)$ konvex, kreisförmig und absorbierend. Solche Mengen entsprechen unserer Vorstellung von „Kugeln" um den Nullpunkt.

1.37 Proposition: Sei X ein $\mathbb{K}$-VR, $M \subseteq X$ konvex, kreisförmig, absorbierend. Dann ist das „Minkowski-Funktional" $p_M(x) := \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda M\}$ eine Halbnorm auf X.

Da $\{x \mid p_M(x) < 1\} \subseteq M \subseteq \{x \mid p_M(x) \leq 1\}$ ist M ungefähr eine Einheitskugel bzgl. p_M.

Ist umgekehrt p eine Halbnorm auf X, so sind $B_p := \{x \in X \mid p(x) < 1\}$, $D_p := \{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$ konvex, kreisförmig, absorbierend und $p_{B_p} = p_{D_p} = p$.

Beweis: $x \in M$, $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ $(a = 0: p_M(0) = 0)$. $p_M(ax) = \inf\{\lambda \mid ax \in \lambda M\} = \inf\{|a|\lambda \mid \underbrace{ax \in |a|\lambda M}_{= a\lambda M \iff x \in \lambda M}\} = |a| p_M(x)$

Δ-Ungl.: Sei $\varepsilon > 0$, $x, y \in M$. Dann $\frac{1}{p_M(x)+\varepsilon} x \in M$, $\frac{1}{p_M(y)+\varepsilon} y \in M$.

$$\overset{M \text{ konvex}}{\Longrightarrow} \underbrace{\frac{p_M(x)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{p_M(x)+\varepsilon} x\right) + \frac{p_M(y)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} \left(\frac{1}{p_M(y)+\varepsilon} y\right)} \in M$$

$$= \frac{1}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} (x+y)$$

$$\Longrightarrow x+y \in (p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon) M, \text{ d.h. } p_M(x+y) \leq p_M(x) + p_M(y)$$

$\llcorner$

Mit Hilfe des Minkowski-Funktionals können wir lokalkonvexe VRe charakterisieren.

1.38 Satz: Sei X ein topologischer $\mathbb{K}$-VR. Dann ist X lokalkonvex genau dann, wenn jede Nullumgebung von X eine offene, konvexe, kreisförmige, absorbierende Menge enthält.

Beweis: „$\Rightarrow$“ 1.36 „$\Leftarrow$“ $\mathcal{P} := \{p_M \mid M$ offen, konvex, kreisförmig, absorbierend, $M \subseteq V$, V Nullumgebung$\}$

Dann stimmt die von $\mathcal{P}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie mit der auf X gegebenen überein.

Seien τ die gegebene und σ die von $\mathcal{P}$ erzeugte Topologie. Sei V offen bzgl. τ. Zu zeigen: V offen bzgl. σ. Benutze Bem. 1.2. Sei also $z \in V$, d.h. $V' := V - z$ Nullumgebung bzgl. τ. So $\exists$ ex. M offen, konvex, … mit $M \subseteq V'$. Dann ist $0 \in \{x \mid p_M(x) < 1\} \subseteq M \subseteq V'$, d.h. V' ist Nullumgebung bzgl. σ $\Rightarrow$ V ist Umgebung von $z \in V$ bzgl. σ.

1.39 Bemerkung: (a) Der springende Punkt in 1.38 ist „B... konvexe Menge“. Denn es gilt: Ist X ein topologischer Vektorraum, so enthält jede Nullumgebung eine kreisförmige, absorbierende Menge.

U Nullumgebung $\Rightarrow$ $\mu^{-1}(U)$ Umgebung von $(0,0)$, wo $\mu: \mathbb{K} \times X \to X$ Multipl., d.h. $\exists \varepsilon > 0$, V Nullumgebung mit $B(0,\varepsilon) \times V \subseteq \mu^{-1}(U)$, also $W := \{\lambda v \mid |\lambda| < \varepsilon, v \in V\} \subseteq U$. W ist kreisförmig und absorbierend.

(c) Sind $p_1, \dots, p_n$ Halbnormen auf X, so sind auch $\sum_{i=1}^n p_i$ und $\max\{p_1, \dots, p_n\}$ Halbnormen auf X. Die Familien $\mathcal{P}' = \{\sum p_i \mid p_i \in \mathcal{P}\}$ und $\mathcal{P}'' = \{\max\{p_1, \dots, p_n\} \mid p_i \in \mathcal{P}\}$ definieren dieselben Topologien auf X wie $\mathcal{P}$ (nach 1.32(c) und (d)). $\mathcal{P}'$ und $\mathcal{P}''$ sind geordnet durch $p(x) \leq q(x)$ $\forall x$ und gerichtet ($p, q \in \mathcal{P}' \Rightarrow p, q \leq p + q$).
Insofern ist $\mathcal{P}$ in einem lokalkonvexen VR o.E. gerichtet.

Analog zu Satz 1.21 (T stetig $\Leftrightarrow$ $\exists C\ \forall x: p(Tx) \leq C p(x)$ mit $p(x) := \|x\|$) kann die Stetigkeit auf lokalkonvexen VRn beschrieben werden.

(b) Man kann auch metrisierbare VRe charakterisieren: X topol. VR. X ist metrisierbar $\Leftrightarrow$ X lokalkonvex, Hausdorffsch und $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $p_n \leq p_{n+1}$.

1.40 Satz: Seien $(X_1, \mathcal{P}_1)$, $(X_2, \mathcal{P}_2)$ lokalkonvexe Räume, $T: X_1 \to X_2$ linear.

Dann: T stetig $\iff \forall q \in \mathcal{P}_2 \; \exists p \in \mathcal{P}_1 \; \exists C \geq 0 : \; q(Tx) \leq C p(x) \; \forall x \in X$

Beweis: „$\Leftarrow$" $x_\lambda \to x$, $q \in \mathcal{P}_2$. Dann $q(Tx_\lambda - Tx) \leq C p(x_\lambda - x) \to 0$ (1.32)

„$\Rightarrow$" Sei $q \in \mathcal{P}_2$. Dann ist $V := \{y \in X_2 \mid q(y) < 1\}$ offen.

$\overset{T \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_1, \; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ mit $T(\{x \mid p_i(x) < \varepsilon_i, \; i = 1, \dots, n\}) \subseteq V$

Wähle $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, $p \geq p_1, \dots, p_n$ ($\mathcal{P}_1$ o.E. gerichtet), $C := \frac{1}{\varepsilon}$

Dann gilt: $p(x) \leq \varepsilon \Rightarrow q(Tx) < 1$. (Denn $p_i(x) \leq p(x) \leq \varepsilon < \varepsilon_i \; \forall i$)

Also: $q(Tx) = q\left(T\left(x \frac{p(x)\,\varepsilon}{p(x)\,\varepsilon}\right)\right) = C p(x)\, q\left(T\left(x \cdot \frac{\varepsilon}{p(x)}\right)\right) \leq C p(x)$