§2 Hahn-Banach-Sätze

Um Räume à la $\{f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\}$ zu verstehen, sind Auswertungsabbildungen $ev_x:\{f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\}\to\mathbb{C}$, $f\mapsto f(x)$, $x\in\mathbb{C}$ hilfreich.

Allgemeiner interessieren wir uns für stetige Funktionale $f:X\to\mathbb{K}$.

2.1 Definition: Ein <u>sublineares Funktional</u> $p:E\to\mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{K}$-VR E ist gegeben durch:

(i) $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ $\forall\lambda\geq 0\ \forall x\in E$

(ii) $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$ $\forall x,y\in E$

2.2 Beispiel: Ist p eine Halbnorm, oder $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ linear, so ist p sublinear.

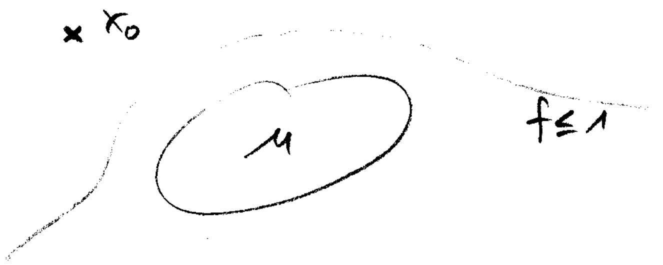
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie eine gegebene lineare Funktion $f:F\to\mathbb{R}$ mit $f(x)\leq p(x)$ $\forall x\in F$, wobei $F\subseteq E$ ein linearer Teilraum ist, auf E fortgesetzt werden kann zu $\tilde{f}:E\to\mathbb{R}$ linear mit $\tilde{f}(x)\leq p(x)$.

Im Spezialfall, dass p eine Norm ist, ist das die Frage nach einer stetigen linearen Fortsetzung. Insbesondere ist es für unendl.-dim. Räume a priori sogar unklar, ob es überhaupt stetige, lineare Abbildungen $f:E\to\mathbb{R}$ gibt.

Die Hahn-Banach-Sätze zählen zu den wichtigsten Sätzen in der Funktionalanalysis und der Mathematik überhaupt.

Sie werden als Fortsetzungssätze (so wie oben beschrieben) oder als Trennungssätze verwendet.

Letzteres ist von der Art: Gibt es eine stetige lineare Funktion $f:X\to\mathbb{R}$ mit $f(x)\leq 1$ auf $M\subseteq X$ und $f(x_0)>1$ für ein festes $x_0\notin M$?



2.3 Satz (Hahn-Banach): Sei E ein $\mathbb{R}$-VR, $p: E \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional, $F \subseteq E$ ein linearer Teilraum, $f: F \to \mathbb{R}$ linear und $f(x) \le p(x)$ $\forall x \in F$.

Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\tilde{f}: E \to \mathbb{R}$ von f mit $\tilde{f}(x) \le p(x)$ $\forall x \in E$.

Beweis: Sei $\mathcal{M} := \{(G,g) \mid F \subseteq G \subseteq E$ ist ein linearer TR, $g: G \to \mathbb{R}$ ist linear, $g|_F = f$, $g(x) \le p(x)\ \forall x \in G\}$.

Dann ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$ (denn $(F,f) \in \mathcal{M}$) und geordnet durch

$$(G_1, g_1) \prec (G_2, g_2) :\iff G_1 \subseteq G_2,\ g_2|_{G_1} = g_1$$

Diese Ordnung ist reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und induktiv
$((G,g) \prec (G,g))$ $\quad ((G,g) \prec (H,h) \prec (G,g) \Rightarrow (G,g) = (H,h))$

(d.h. ist $(G_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ eine Familie von Elementen in $\mathcal{M}$, so dass je zwei Elemente vergleichbar sind, so ist $G := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, $g(x) := g_\alpha(x)$ für $x \in G_\alpha \subseteq G$ eine wohldef. obere Schranke). Nach dem Lemma von Zorn existiert also ein maximales Element $(H,h) \in \mathcal{M}$.

Ang.: $H \neq E$. Also ex. $z \in E \setminus H$. Definiere auf dem von H und z erzeugten linearen Teilraum $\langle H, z \rangle$ eine lineare Abbildung $\tilde{h}$, so dass $(H,h) \prec (\langle H,z \rangle, \tilde{h}) \in \mathcal{M}$ (↯)

Seien dazu $x, y \in H$. Dann: $h(x) + h(y) = h(x+y) \le p(x+y) \le p(x+z) + p(y-z)$

$$\Rightarrow \quad m := \sup_{y \in H} \{h(y) - p(y-z)\} \le \inf_{x \in H} \{p(x+z) - h(x)\} =: M \quad \cancel{\forall z \in H}$$

Wähle $a \in [m, M]$ und setze $\tilde{h}(x + \lambda z) := h(x) + \lambda a$ für $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Da H und z l.u. sind, ist $\tilde{h}$ linear und wohldefiniert, $(H,h) \prec (\langle H,z \rangle, \tilde{h})$.

Außerdem ist $\tilde{h}(x) \le p(x)$, denn für $x \in H$ ist:

$\lambda > 0$: $\tilde{h}(x + \lambda z) = h(x) + \lambda a \overset{(a \le M)}{\le} h(x) + \lambda \left(p\left(\frac{x}{\lambda} + z\right) - h\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = p(x + \lambda z)$

$\lambda < 0$: $\tilde{h}(x + \lambda z) \underset{(a \ge m,\ \lambda < 0)}{\le} h(x) + \lambda m \le h(x) + \lambda \left(h\left(-\frac{x}{\lambda}\right) - p\left(-\frac{x}{\lambda} - z\right)\right) = p(x + \lambda z)$

□

Wir werden diesen Satz nun in verschiedenen Versionen verfeinern.

23.10.

2.4 <u>Beispiel</u>: Auf $\ell^\infty_{\mathbb{R}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, $a_n \in \mathbb{R}\}$ existiert ein beschränktes lineares Funktional $LIM: \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, mit $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le LIM((a_n)) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. (Blatt 3)

Für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist das der bekannte Limes von Folgen, für nicht konvergente ist das ein „Banach-Limes".

2.5 <u>Satz (Hahn-Banach)</u>: Sei E ein $\mathbb{K}$-VR, p eine Halbnorm auf E, $F \subseteq E$ ein linearer Teilraum, $f: F \to \mathbb{K}$ linear, $|f(x)| \le p(x)$ $\forall x \in F$. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\tilde{f}: E \to \mathbb{K}$ von f mit $|\tilde{f}(x)| \le p(x)$ $\forall x \in E$.

<u>Beweis</u>: 1.) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Da $f(x) \le |f(x)|$, ex. $\tilde{f}$ nach Satz 2.3.
Da $-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \le p(-x) = p(x)$ gilt dann auch $|\tilde{f}(x)| \le p(x)$.

2.) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Betrachte $u: F \to \mathbb{R}$, $u(x) := \operatorname{Re} f(x)$. Also $|u(x)| \le |f(x)| \le p(x)$.
Nach 1.) ex. dann eine Fortsetzung $\tilde{u}: E \to \mathbb{R}$ mit $|\tilde{u}(x)| \le p(x)$.
Setze $\tilde{f}(x) := \tilde{u}(x) - i\tilde{u}(ix)$. Dann $\tilde{f}|_F = f$, denn
$u(ix) = \operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re} if(x) = -\operatorname{Im} f(x)$.
Es gilt $\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$ und $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \tilde{f}(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
aber auch $\tilde{f}(ix) = \tilde{u}(ix) - i\tilde{u}(-x) = i\tilde{f}(x)$, d.h. $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \tilde{f}(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
Und zu $x \in E$ ex. $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| = 1$, so dass $|\tilde{f}(x)| = \mu \tilde{f}(x)$.
Also $|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(\mu x) = \operatorname{Re} \tilde{f}(\mu x) = \tilde{u}(\mu x) \le p(\mu x) = p(x)$. □

2.6 <u>Korollar</u>: Sei E ein normierter $\mathbb{K}$-VR.

(a) $\forall x \in E, x \neq 0$ $\exists f: E \to \mathbb{K}$ stetig, linear mit $f(x) = 1$

(b) Ist $F \subseteq E$ ein linearer Teilraum, $f: F \to \mathbb{K}$ stetig, linear, so existiert eine stetige, lineare Fortsetzung $\tilde{f}: E \to \mathbb{K}$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

<u>Beweis</u>: (a) Definiere $g: \langle x\rangle \to \mathbb{K}$ auf dem endl.-dim. TR $\langle x\rangle \subseteq E$ durch $g(\lambda x) := \lambda$, $p: E \to \mathbb{K}$ eine Halbnorm durch $p(y) := \frac{1}{\|x\|}\|y\|$. Dann $|g(\lambda x)| = |\lambda|\frac{\|x\|}{\|x\|} = p(\lambda x)$.
Nach 2.5 ex. also eine Fortsetzung f mit $|f(y)| \le p(y) = \frac{1}{\|x\|}\|y\|$, d.h. f ist stetig.

(b) Mit $p(x) := \|f\|\|x\|$ gilt $|f(x)| \le p(x)$, nach 2.5 ex. also $\tilde{f}$ mit $|\tilde{f}(x)| \le p(x) = \|f\|\|x\|$, d.h. $\tilde{f}$ ist stetig und $\|\tilde{f}\| \le \|f\|$. Für $x \in F$ ist jedoch $\tilde{f}(x) = f(x)$, d.h. $\|\tilde{f}\| \underset{1.23(b)}{=} \|f\|$ □

In (a) wird also gezeigt, dass es viele stetige, lin. Funktionale gibt. Außerdem trennt f den Punkt $x \neq 0$ von 0 ($f(x) \neq f(0) = 0$).
Auch in lokalkonvexen Räumen haben wir Fortsetzungs- (2.7) bzw. Trennungssätze (2.8 und 2.9).

2.7 <u>Satz</u>: Sei E ein lokalkonvexer Raum, $F \subseteq E$ linearer TR, $f: F \to \mathbb{K}$ stetig, linear. Dann ex. $\tilde{f}: E \to \mathbb{K}$ stetige, lineare Fortsetzung.

<u>Beweis</u>: Da f stetig ist ex. nach 1.42 eine Halbnorm p auf E und $C > 0$ mit $|f(x)| \le C p(x)$ und nach 2.5 eine lineare Fortsetzung $\tilde{f}$ mit $|\tilde{f}(x)| \le C p(x)$, d.h. $\tilde{f}$ ist stetig (1.42). □

2.8 <u>Satz</u>: Sei E ein lokalkonvexer, reeller VR, $M \subseteq E$ abgeschlossen, konvex, $0 \in M$, und sei $x_0 \notin M$. Dann gibt es eine lineare, stetige Funktion $f: E \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0) > 1$ und $f(x) \le 1$ $\forall x \in M$.

<u>Beweis</u>: Sei V eine offene, konvexe, kreisförmige, absorbierende Nullumgebung, so dass $(x_0 + V) \cap M = \emptyset$ (ex., da M abgeschlossen ist und nach 1.40).
Dann gilt auch $(x_0 + \frac{V}{2}) \cap (M + \frac{V}{2}) = \emptyset$
(denn sei $x_0 + \frac{z_1}{2} = y + \frac{z_2}{2}$, $z_1, z_2 \in V$, $y \in M$. Dann $\overbrace{x_0 + \tfrac{1}{2}(z_1 - z_2)}^{\in x_0 + V} = y \in M$ ↯)
$M' := M + \frac{V}{2}$ ist konvex und absorbierend. Das zugehörige Minkowski-Funktional $p_{M'}$ ist dann sublinear (der Beweis dafür ist wie in 1.39, ohne Ansatz von Kreisförmigkeit).

Definiere nun $f_0 : \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$, $\lambda x_0 \mapsto \lambda p_{M'}(x_0)$, d.h. $f_0(x) \leq p_{M'}(x)$

$\overset{2.3}{\Longrightarrow} \exists f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = p_{M'}(x_0) \overset{(x_0 + \frac{V}{2} \notin M')}{>} 1$ und $f(x) \leq p_{M'}(x)$.

Somit ist f stetig.

(Man kann in 1.39 zeigen, dass $p_{M'}$ stetig ist, d.h. $|f(x)| \leq C p(x)$)

Und $x \in M \Rightarrow x \in M + \frac{V}{2} = M'$, d.h. $p_{M'}(x) \leq 1$, $f(x) \leq 1$. □

2.9 <u>Korollar</u>: Ist $M \subseteq E$ abgeschlossener TR, E lokalkonvexer $\mathbb{K}$-VR, $x_0 \in E \setminus M$, dann ex. $f : E \to \mathbb{R}$ stetig, linear mit $f(x_0) = 1$ und $f \equiv 0$ auf M.

<u>Beweis</u>: 1.) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nach 2.8 ex. $f : E \to \mathbb{R}$ stetig, linear mit $f(x_0) > 1$, $f(x) \leq 1$ $\forall x \in M$. Setze dann $f' := \frac{f}{f(x_0)}$.

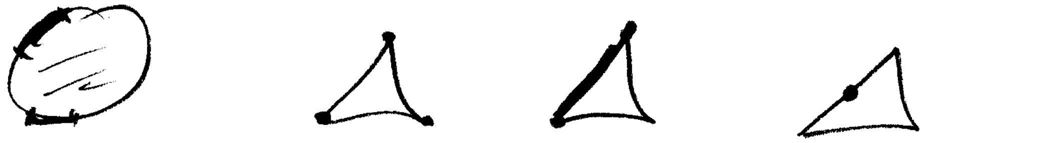
2.) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wieder Aufspaltung in Realteile. □

2.10 <u>Bemerkung</u>: 2.6(a) ist also auch für lokalkonvexe VRe wahr (2.9 mit $M = \{0\}$).

Eine Folgerung aus den Hahn-Banach-Sätzen ist beispielsweise der Satz von Krein-Milman, der etwas über die Geometrie von lokalkonvexen VRn aussagt.

2.11 <u>Def./Anm.</u>: Sei X ein VR, $C \subseteq X$ konvex.
Eine Teilmenge $M \subseteq C$ heißt <u>extrem in C</u>, falls für $x, y \in C$ aus $tx + (1-t)y \in M$ für ein $t \in (0,1)$ schon $x, y \in M$ folgt.
Ein Punkt $z \in X$ heißt <u>Extrempunkt von C</u>, falls aus $tx + (1-t)y = z$ für $t \in (0,1)$, $x, y \in C$ schon $x = y = z$ folgt.

2.12 <u>Beispiel</u>: in $\mathbb{R}^2$



2.13 Satz (Krein-Milman): Sei X ein lokalkonvexer VR und $\emptyset \neq C \subseteq X$ eine kompakte, konvexe Teilmenge. Dann besitzt C mindestens einen Extremalpunkt.
Ist $\emptyset \neq K \subseteq C$ eine kompakte, extremale Teilmenge in C, so enthält K einen Extremalpunkt von C.

Beweis: Betrachte $\mathcal{M} := \{\emptyset \neq K \subseteq C \text{ extremal, kompakt}\}$. $\mathcal{M}$ ist induktiv geordnet durch „$\supseteq$". (Induktiv: $\bigcap K_i$ ist obere Schranke für $(K_i) \subseteq \mathcal{M}$, $K_i \subseteq K_{i+1}$; $\bigcap K_i \neq \emptyset$ ← Cantor-Kriterium)
Also ex. ein maximales Element K_0. bzz.: K_0 ist Einpunktmenge.
Ann.: $\exists x_0 \neq y_0$ in K_0 $\overset{2.9}{\Longrightarrow}$ $\exists f: X \to \mathbb{K}$ stetig, linear mit $f(x_0 - y_0) = 1$. O.E. $\operatorname{Re} f(x_0) \neq \operatorname{Re} f(y_0)$ (sonst mit $\operatorname{Im} f(x_0)$)
Da K_0 kompakt ist, ex. ein Minimum m von $\operatorname{Re} f$ auf K_0.
Sei $K^* := \{y \in K_0 \mid \operatorname{Re} f(y) = m\}$. Dann ist $\underset{m \text{ ist Min.}}{\emptyset \neq} K^* \underset{\operatorname{Re} f(x_0) \neq \operatorname{Re} f(y_0)}{\subsetneq} K_0$
und K^* ist kompakt, da abgeschlossen ($K^* = (\operatorname{Re} f)^{-1}(\{m\})$).
Außerdem ist K^* extremal in K_0: Sei $tx + (1-t)y \in K^*$ für $t \in (0,1)$, $x, y \in K_0$.
$\Rightarrow t \operatorname{Re} f(x) + (1-t) \operatorname{Re} f(y) = \operatorname{Re} f(tx + (1-t)y) = m$ und $\operatorname{Re} f(x), \operatorname{Re} f(y) \geq m$
$\Rightarrow \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(y) = m$, d.h. $x, y \in K^*$.
Sei nun $tx + (1-t)y \in K^*$, $t \in (0,1)$ und $x, y \in C$ $\overset{K_0 \subseteq C \text{ extr.}}{\Longrightarrow}$ $x, y \in K_0$ $\overset{K^* \subseteq K_0 \text{ extr.}}{\Longrightarrow}$ $x, y \in K^*$
Somit $\lightning$ zur Maximalität von K_0. D.h. $K_0 = \{z\}$.
Ist $K \subseteq C$ komp., extremal, so ist $K \in \mathcal{M}$ und daher $K_0 \subseteq K$. □

2.14 Lemma: Ist $M \subseteq X$ eine Teilmenge, so kann die konvexe Hülle
$\operatorname{konv}(M) := \bigcap_{M \subseteq C,\, C \text{ konvex}} C$ geschrieben werden als:
$$\operatorname{konv}(M) = \{\sum_{i=1}^n t_i x_i \mid x_1, \dots, x_n \in M,\ t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$
Beweis: „$\supseteq$": $\operatorname{konv}(M)$ ist konvex, also gilt $\sum t_i x_i \in \operatorname{konv}(M)$ $\forall x_i \in \operatorname{konv}(M)$
$\left(\sum^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1-t_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{t_i}{(1-t_1)} x_i \in \operatorname{konv}(M) \text{ induktiv} \right)$
„$\subseteq$" Die Menge $\{\dots\}$ ist konvex und enthält M. □
$\left(t \sum^n t_i x_i + (1-t) \sum^m s_i y_i = \sum t_i' x_i' \in \{\dots\} \text{ mit } \sum t_i' = 1 \right)$

2.15 Korollar (Krein-Milman): Sei X ein lokalkonvexer VR und $C \subseteq X$ kompakte, konvexe Teilmenge.

Dann ist $C = \overline{\operatorname{konv}(\operatorname{Ext}(C))}$, wobei $\operatorname{Ext}(C) := \{ z \in C \mid z \text{ Extremalpunkt} \}$.

Beweis: Da C konvex ist, gilt $\operatorname{konv}(\operatorname{Ext}(C)) \subseteq C$.

$\Rightarrow A := \overline{\operatorname{konv}(\operatorname{Ext}(C))} \subseteq \overline{C} = C$. Ang.: $\exists x_0 \in C \setminus A$.

O.E. $0 \in A$ (sonst translatieren), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

A ist abgeschlossen und konvex. Nach 2.8 ex. also eine lineare, stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0) > 1$, $f \leq 1$ auf A.

Die Menge $K := \{ x \in C \mid f(x) = \max_{y \in C} f(y) \}$ ist nicht leer (da C kompakt), kompakt (da abgeschl.) und extremal (wie im Bew. von 2.13)

$\overset{2.13}{\Longrightarrow}$ K enthält einen Extremalpunkt z von C. Also $z \in A$ und somit $f(z) \leq 1$. Aber $\max_{y \in C} f(y) \geq f(x_0) > 1$ ↯ □