§3 Dualräume

Wie in §2 sind wir an linearen, stetigen Funktionalen $f: X \to \mathbb{K}$ interessiert. Erinnerung: Ist E ein normierter Raum, so ist sein Dualraum (1.22) $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \{f: E \to \mathbb{K} \text{ lin., stetig}\}$ ein Banachraum (1.27).

3.1 **Bemerkung:** Zwischen E und E' existiert eine bilineare (d.h. linear in beiden Komponenten) Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : E' \times E \to \mathbb{K}$, gegeben durch $\langle f, x \rangle := f(x)$. (Ist E ein Hilbertraum, so ist $E \cong E'$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entspricht dem Skalarprodukt). Diese Abbildung ist stetig, denn

$$f_n \to f,\ x_n \to x \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x)| \le \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} \underbrace{\|x_n\|}_{\text{beschr.}} + \|f\| \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0}$$

3.2 **Satz:** Ist E normiert, so existiert eine natürliche Abbildung $i: E \to E''$ mit $i(x)(f) = f(x)$, $f \in E'$. Diese Abbildung i ist linear, stetig und isometrisch (d.h. $\|i(x)\| = \|x\|$).

Beweis: i ist wohldef., denn $i(x)$ ist linear und stetig (d.h. $i(x) \in E''$):
$|i(x)(f)| = |f(x)| \le \|f\| \|x\| \Rightarrow \|i(x)\| \le \|x\|$, also auch i stetig ($\|i\| \le 1$).
Nach Hahn-Banach (2.6) findet sich zu $x \in E$ eine Funktion $f \in E'$ mit $f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$ (als Fortsetzung von $\langle x \rangle \to \mathbb{K}$, $\lambda x \mapsto \lambda \|x\|$).
Also $|i(x)(f)| = \|x\|$, d.h. $\|i(x)\| = \|x\|$. □

3.3 **Bemerkung:** Da E'' vollständig ist, ist die Vervollständigung von E isometrisch isomorph zu $\overline{i(E)} \subseteq E''$. (Blatt 1, A4)

3.4 **Definition:** E heißt *reflexiv*, falls $i: E \to E''$ ein Isomorphismus ist.

3.5 **Beispiel:** (a) $c_0' = \ell^1$, $\ell^{1\prime} = \ell^\infty$ nach Blatt 2, d.h. c_0 nicht reflexiv.

(b) $c := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{C}, (a_n) \text{ konvergent}\} \supsetneq c_0$ aber $c_0' = c'$ (Blatt 4)

(c) $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann $\ell^{p\prime} = \ell^q$, $\ell^{q\prime} = \ell^p$.
Also ℓ^p für $1 < p < \infty$ reflexiv. (Blatt 4)

3.6 Satz: Seien E, F normierte Räume, $T: E \to F$ stetig, linear.

(a) Es gibt genau eine Abbildung $T': F' \to E'$

mit $\langle x, Ty \rangle_{F' \times F} = \langle T'x, y \rangle_{E' \times E}$ $\quad \forall x \in F', y \in E$

(b) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[d, "i"] \\ E'' \arrow[r, "T''"] & F'' \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, d.h. T'' setzt T fort.

(c) T' ist stetig, linear mit $\|T'\| = \|T\|$.

Beweis: (a) Setze $T'(f) := f \circ T \in E'$.

Dann $\langle x, Ty \rangle = x(Ty) = (x \circ T)(y) = T'(x)(y) = \langle T'x, y \rangle$.

(b) Sei $x \in E$, $f \in F'$. Dann

$$(T''(ix))(f) \overset{3.1}{=} \langle T''(ix), f \rangle_{F'' \times F'} \overset{(a)}{=} \langle ix, T'f \rangle_{E'' \times E'} \overset{3.1}{=} (ix)(T'f) \overset{3.2}{=} (T'f)(x)$$

$$\overset{3.1}{=} \langle T'f, x \rangle_{E' \times E} \overset{(a)}{=} \langle f, Tx \rangle_{F' \times F} = f(Tx) \overset{3.2}{=} (i(Tx))(f)$$

$\Rightarrow T''(ix) = i(Tx)$. $\quad$ (Lese: $\langle T''(ix), f \rangle = \langle ix, T'f \rangle = \langle Tx, f \rangle$)

(c) T' linear: ✓. Sei $x \in F'$, $y \in E$. Dann

$|(T'x)(y)| = |x(Ty)| \le \|x\| \|Ty\| \le \|x\| \|T\| \|y\|$ $\quad \forall y \in E$

$\Rightarrow \|T'x\| \le \|T\| \|x\|$ $\forall x \in F'$ $\Rightarrow \|T'\| \le \|T\|$ $\quad$ (d.h. T' stetig)

Aber auch $\|T''\| \le \|T'\| \le \|T\|$ und $\|T\| \le \|T''\|$, da T'' Fortsetzung von T. $\square$

($\|T''\| = \sup\{\|T''y\| \mid y \in E'', \|y\| = 1\} \ge \sup\{\|T''ix\| \mid x \in E, \|ix\| = \|x\| = 1\}$
$= \sup\{\|Tx\| = \|iTx\| \mid x \in E, \|x\| = 1\} = \|T\|$)

3.7 Bemerkung: Die Norm auf E ist gegeben durch

$\|x\| = \sup\{|f(x)| \mid f \in E', \|f\| \le 1\}$ $\quad$ (Blatt 3)