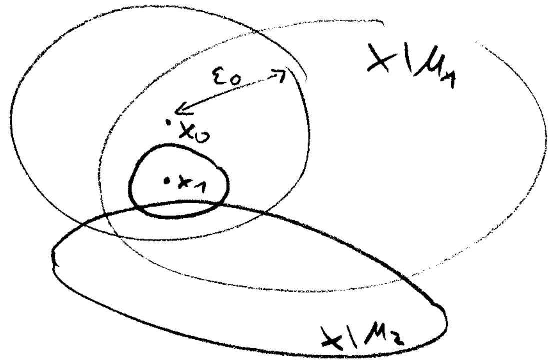
§4 Der Satz von Baire und Folgerungen

Betrachtet man $c_0 = \{(a_n) \mid (a_n) \text{ Nullfolge}\}$, so stellt sich z.B. die Frage nach einer Basis dieses Vektorraums. Versuch: $e_n := (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ n-te Stelle}}{1}, 0, \dots)$.
Aber $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Basis, denn es erzeugt bloß $f = \{(a_n) \mid a_n = 0 \text{ ab } n \geq N\}$ (Blatt 2). Wir werden sehen, dass c_0 keine abzählbare VR-Basis besitzt!

4.1 Satz (Baire): Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $M_n \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen, so dass $X = \bigcup_{n\in I} M_n$, I abzählbar.
Dann existiert ein $n_0 \in I$ und $U \neq \emptyset$ offen, so dass $U \subseteq M_{n_0}$.

Beweis: Annahme: $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: B(x,\varepsilon) \cap X \setminus M_n \neq \emptyset$ $\quad (B(x,\varepsilon) := \{y \mid d(x,y) < \varepsilon\})$

Sei $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$. Also $B(x_0,\varepsilon_0) \cap (X\setminus M_1) \neq \emptyset$ und offen.
$\Rightarrow \exists x_1 \in X,\ 0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon_0$ mit $B(x_1, 2\varepsilon_1) \subseteq B(x_0,\varepsilon_0) \cap (X\setminus M_1)$.
Wähle induktiv $x_n \in X$, $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2^n}\varepsilon_0$
mit $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subseteq B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \cap (X\setminus M_n)$.



Somit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy und konvergiert also gegen ein $x \in X$.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $d(x_n, x) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_n$
Also ist $x \in B(x_n, 2\varepsilon_n) \subseteq X\setminus M_n$, d.h. $x \notin M_n\ \forall n$ ↯ $(X = \bigcup M_n)$ □

4.2 Bemerkung: (a) Eine alternative Formulierung von 4.1 ist:
Sei X ein vollst. metrischer Raum, $U_n \subseteq X$ dicht, offen, $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ dicht in X.

(b) Man sagt für eine Teilmenge $M \subseteq X$ eines topologischen Raums:
- M heißt nirgends dicht, falls $\overline{M}$ keine (nichtleeren) offenen Teilmengen enthält.
- M heißt von 1. Kategorie, falls $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, M_n nirgends dicht. $(\forall n)$
- M heißt von 2. Kategorie sonst.

Der Satz von Baire sagt also, dass jeder vollständige, metrische Raum von 2. Kategorie (in sich selbst) ist.

4.3 Korollar: Es gibt keinen Banachraum von abzählbar unendlicher Vektorraum-Dimension. (Blatt 5)

4.4 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit):

(a) nichtlinear: Sei X vollständiger, metrischer Raum und $F \subseteq C_{\mathbb{R}}(X) := \{f: X \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$, so dass $\sup\limits_{f\in F} f(x) < \infty \quad \forall x \in X$.

Dann existiert eine offene Kugel $U \subseteq X$, so dass $\sup\limits_{x\in U} \sup\limits_{f \in F} f(x) < \infty$

(b) linear: Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $A \subseteq B(X,Y)$, so dass $\sup\limits_{T\in A} \|Tx\| < \infty \quad \forall x \in X$.

Dann gilt auch $\sup\limits_{T\in A} \|T\| < \infty$

Beweis: (a) $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ für $M_n := \{x\in X \mid f(x) \leq n \quad \forall f \in F\}$

und $M_n = \bigcap\limits_{f\in F} \{x \in X \mid f(x) \leq n\} = \bigcap\limits_{f \in F} f^{-1}(-\infty, n]$ abgeschlossen. Dann 4.1.

(b) Setze $F := \left\{ f_T : \begin{array}{l} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|Tx\| \end{array} \;\middle|\; T \in A \right\} \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$. Nach (a) ex. $U = B(x_0, R)$ und $K \geq 0$, so dass $\|Tx\| \leq K \quad \forall x \in U, T \in A$.

Sei nun $x \in X$, $\|x\| = 1$. Dann

$$\|Tx\| = \frac{2}{R} \left\|T\left(\frac{R}{2}x\right)\right\| \leq \frac{2}{R} \|T(\underbrace{\tfrac{R}{2}x + x_0}_{\in U})\| + \frac{2}{R} \|T\underbrace{x_0}_{\in U}\| \leq \frac{4}{R} K \quad \forall T \in A$$

$\square$

4.5 Korollar: Sei E normierter Raum, $M \subseteq E$ eine Teilmenge, so dass $f(M)$ beschränkt ist für alle $f \in E'$. Dann ist M beschränkt.

(Ist M also in jede eindimensionale Richtung beschränkt, so schon insgesamt.)

Beweis: Blatt 5.

4.6 **Korollar** (Satz von Banach-Steinhaus): Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$.
Konvergiert (T_n) punktweise, so ist der Grenzwert T schon in $\mathcal{L}(X,Y)$.
Hierbei ist $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ für $x\in X$. Es gilt $\|T\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Beweis: T linear ✓ bzw.: T ist beschränkt.
Für $x\in X$ ist $\|T_n x\| \leq M_x \ \forall n\in\mathbb{N}$. Nach 4.4 ist
also $S := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Sei nun $x\in X$, $\|x\|=1$, $\varepsilon>0$.
Dann $\|Tx\| \leq \underbrace{\|Tx - T_n x\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|T_n x\|}_{\leq S} \leq S+\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0 \Rightarrow \|Tx\| \leq S \quad \forall \|x\|=1$
$\Rightarrow \|T\| \leq S$. □

Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Satz von Baire ist der Satz von der offenen Abbildung. Seien dazu E, F vollständige, metrische VRe (IK-VR mit Metrik für die er topol. VR ist) und $T\in\mathcal{L}(E,F)$. Ist T bijektiv, so existiert $T^{-1}: F\to E$ und ist auch linear – aber ist T^{-1} auch stetig? Gilt $T^{-1}\in\mathcal{L}(F,E)$?
Das ist besonders interessant für $E=F$: Ist $\mathcal{L}(E)$ abgeschlossen unter Inversion bzgl. der Multiplikation $T\cdot S := T\circ S$?
Wir müssen dazu überprüfen, ob $\underset{TU}{\underbrace{(T^{-1})^{-1}U}} \subseteq F$ offen ist für alle $U\subseteq E$ offen.

4.7 **Definition**: Eine Abbildung $T: E\to F$ zwischen topologischen VRn heißt *offen*, falls $TU\subseteq F$ offen ist $\forall U\subseteq E$ offen.

4.8 **Lemma**: Seien E, F vollständige, metrische Vektorräume, $T: E\to F$ stetig, linear. Ist T offen, so ist T surjektiv.
Beweis: Da $E\subseteq E$ offen ist, ist $TE\subseteq F$ ein offener Untervektorraum.
Also ex. $r>0$, so dass $B(0,r)\subseteq TE$.
Ist nun $x\in F$, so ist $\frac{1}{n}x\in B(0,r)$ für ein $n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow x = n\cdot(\frac{1}{n}x)\in TE$. □

4.9 Satz (von der offenen Abbildung): Seien E, F vollständige, normierte VRe (oder mit translationsinvarianter Metrik, d.h. $d(x+z, y+z) = d(x,y)\ \forall x,y,z$) und $T: E \to F$ stetig, linear. Ist T surjektiv, so ist T offen.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ definiere $E_\varepsilon := B(0,\varepsilon) \subseteq E$, $F_\eta := B(0,\eta) \subseteq F$.

Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nTE_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(nE_\varepsilon) = T(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nE_\varepsilon) = TE \underset{T \text{ surj.}}{=} F$.

Insbesondere ist $\bigcup_n \overline{nTE_\varepsilon} = F$, nach Baire existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\overline{n_0 TE_\varepsilon}$ eine offene Kugel U enthält, d.h. $\overline{TE_\varepsilon}$ enthält eine offene Kugel ($\frac{1}{n_0}U \subseteq \overline{TE_\varepsilon}$).

Da die Addition stetig ist, ex. $M := E_\delta \subseteq E$ mit $M - M \subseteq E_\varepsilon$

$\left[\exists \delta > 0: B(0,\delta) + B(0,\delta) \subseteq B(0,\varepsilon).\ M - M = \{x - y \mid x,y \in M\} = B(0,\delta) \pm B(0,\delta)\right]$

Also ex. auch $V \subseteq \overline{TM}$ offen ($M = E_\delta$).

Dann $0 \in V - V \subseteq \overline{TM} - \overline{TM} \subseteq \overline{TM - TM} \subseteq \overline{TE_\varepsilon}$.

Da $V - V = \bigcup_{x\in V} x - V$ offen ist, ex. $F_\eta \subseteq V - V \subseteq \overline{TE_\varepsilon}$. Bez: $F_\eta \subseteq TE_{3\varepsilon}$

$\big[$Dann gilt: Ist $U \subseteq E$ offen und $z = Tx \in TU$, so ex. $\varepsilon, \eta > 0$ mit $x + E_{3\varepsilon} \subseteq U$ und $F_\eta \subseteq TE_{3\varepsilon}$, d.h. $z + F_\eta \subseteq T(x + E_{3\varepsilon}) \subseteq TU$.

Wähle $\mu_i > 0$ mit $\mu_i \to 0$ und $F_{\mu_i \eta} \subseteq \overline{TE_{2^{-i}\varepsilon}}$.

Sei nun $y \in F_\eta \subseteq \overline{TE_\varepsilon}$. Dann ex. $x_0 \in E_\varepsilon$, so dass $Tx_0 \in y + F_{\mu_1\eta}$

Also ex. $x_1 \in E_{2^{-1}\varepsilon}$ mit $Tx_0 + Tx_1 \in y + F_{\mu_2\eta}$ ($Tx_0 - y \in F_{\mu_1\eta} \subseteq \overline{TE_{2^{-1}\varepsilon}}$)

Induktiv ex. $x_n \in E_{2^{-n}\varepsilon}$ mit $S_n := \sum_{i=0}^{n} Tx_i \in y + F_{\mu_{n+1}\eta}$

$\Rightarrow S_n \to y$ und $t_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$ ist Cauchyfolge:

$d(t_n, t_m) \le \underbrace{d(t_n, t_{n+1})}_{= d(0, x_{n+1}) < 2^{-(n+1)}\varepsilon} + d(t_{n+1}, t_{n+2}) + \dots + d(t_{m-1}, t_m) < 2^{-n}\varepsilon$, $n < m$

Da E vollständig ist, ex. $z \in \overline{E_{2\varepsilon}} \subseteq E_{3\varepsilon}$ mit $t_n \to z$

($t_n \in E_{2\varepsilon}\ \forall n$)

$\overset{T \text{ stetig}}{\Longrightarrow}\quad y \leftarrow S_n = Tt_n \to Tz \in TE_{3\varepsilon}$. $\square$

4.10 Korollar: Seien E, F Banachräume, $T: E \to F$ linear, stetig. Dann ist T surjektiv, genau dann wenn T offen ist.

4.11 Korollar: Seien E, F Banachräume, $T: E \to F$ linear, stetig. Ist T bijektiv, so ist T^{-1} stetig. D.h.:
$T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijektiv $\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Beweis: $(T^{-1})^{-1} U = TU \subseteq F$ offen $\forall U \subseteq E$ offen $\square$

4.12 Korollar: Seien E, F Banachräume und sei $T: E \to F$ linear, stetig und bijektiv. Dann sind E und F schon als Banachräume isomorph.

Beweis: $c_1 \|x\|_E \underset{x=(T^{-1})Tx}{\le} \|Tx\|_F \le c_2 \|x\|_E$ $\square$

4.13 Beispiel: Sei E ein Banachraum und $M \subseteq E$ ein abgeschlossener TR. Dann ist $E \to E/M$ surjektiv und also offen (s. auch 1.32).
Ist F ein weiterer Banachraum und $T: E \to F$ stetig, linear, so ist $\ker T := \{x \in E \mid Tx = 0\} \subseteq E$ ein abgeschlossener, linearer TR.
Ist T zudem surjektiv, so ist $E/\ker T \cong F$ (als Banachräume)

Beweis: Habe
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, two heads, "T"] \arrow[dr] & & F \\ & E/\ker T \arrow[ur, dashed, "S"'] & \end{tikzcd}$$
Definiere $S\dot{x} := Tx$.

Dann ist S wohldefiniert ($\dot{x} = \dot{y} \Rightarrow x - y \in \ker T$, d.h. $Tx = Ty$), linear und $\|S\dot{x}\| = \|Tx\| = \inf\{\|Tz\| \mid z \sim x\} \le \|T\| \|\dot{x}\|$, d.h. S ist stetig.
S injektiv: $S\dot{x} = S\dot{y} \Rightarrow Tx = Ty \Rightarrow x - y \in \ker T \Rightarrow \dot{x} = \dot{y}$
S surjektiv: $y \in F \Rightarrow \exists x \in E: Tx = y$ und $S\dot{x} = y$. Dann 4.12 $\square$

4.14 Definition: Sei $T: E \to F$ eine Abbildung. Dann ist
$\mathrm{Graph}(T) := \{(x, Tx) \mid x \in E\} \subseteq E \times F$ der Graph von T.

4.15 Bemerkung: $\mathrm{Graph}(T) \subseteq E \times F$ abgeschlossen (in der Produkttopologie)

$$\Leftrightarrow \big[\underbrace{(x_n, Tx_n) \to (x,y)}_{\Leftrightarrow\, x_n \to x \text{ und } Tx_n \to y} \Rightarrow Tx = y\big]$$

4.16 Satz (abgeschlossener Graph): Seien E, F Banachräume, $T: E \to F$ linear. Ist $\mathrm{Graph}(T) \subseteq E \times F$ abgeschlossen, so ist T stetig.

Beweis: $E \times F$ ist wieder normierter Raum mit der Norm
$\|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oder $\|(x,y)\|_2 := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$
oder $\|(x,y)\|_1 := \|x\| + \|y\|$. Diese Normen sind äquivalent und beschreiben die Produkttopologie $(x_n, y_n) \to (x,y) \Leftrightarrow (x_n \to x, y_n \to y)$ auf $E \times F$.
$E \times F$ wird so zu einem Banachraum und $\mathrm{Graph}(T)$ ist also auch ein Banachraum (als abgeschl. TR).
Die Abbildungen $\pi_E: \mathrm{Graph}(T) \to E$, $(x,y) \mapsto x$, $\pi_F: \mathrm{Graph}(T) \to F$, $(x,y) \mapsto y$ sind stetig und linear. π_E ist zudem bijektiv $\overset{4.11}{\Longrightarrow}$ π_E^{-1} ist stetig.
Dann ist auch $T = \pi_F \circ \pi_E^{-1}$ stetig. $\square$