§5 Hilberträume

Um lineare Abbildungen $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (also Matrizen $A \in M_n(\mathbb{C})$) zu verstehen, sind die Größen a_{ij} hilfreich, wenn $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Stattet man $\mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ aus und betrachtet man die Standardbasis $e_i := (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ i-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$ in $\mathbb{C}^n$, so ist

$$\langle A e_j, e_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, e_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle e_k, e_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ki} = a_{ij}.$$

Für allgemeine Operatoren $A \in \mathcal{L}(H)$ ist es also wünschenswert, auf H ein Skalarprodukt zu besitzen und einen Begriff einer „Basis" mit $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ zu haben.

5.1 Definition: Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ auf einem $\mathbb{K}$-VR H heißt <u>Skalarprodukt</u>, falls:

(i) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ $\quad \forall x, y, z \in H,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (Linearität in der 1. Komponente)

(ii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$ $\quad \forall x, y \in H$

(iii) $\langle x, x \rangle \ge 0$ $\quad \forall x \in H$

(iv) $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

Eine Abbildung mit (i) bis (iii) (ohne (iv)) heißt <u>positive hermitesche Form</u>.
Ist ein $\mathbb{K}$-VR H mit einem Skalarprodukt ausgestattet, so heißt er <u>Prä-Hilbertraum</u>.

5.2 Bemerkung: $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle \overset{(ii)}{=} \overline{\langle \lambda x + \mu y, z \rangle} \overset{(i)+(ii)}{=} \bar{\lambda} \langle z, x \rangle + \bar{\mu} \langle z, y \rangle$

Das Skalarprodukt ist also eine Sesquilinearform (linear in der ersten und antilinear in der zweiten Komponente).

5.3 Beispiel: (a) $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ ist ein Prä-HR.

(b) $C[0,1]$ ist mit $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)}\, dt$ ein Prä-HR.

(c) Auch $L^2([0,1], \lambda)$, λ Lebesguemaß, oder allgemeiner $L^2(X, \mu)$ ist ein Prä-HR per $\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)}\, d\mu(x)$.

Für $X = \mathbb{N}$ und $\mu = \Sigma$ das Zählmaß, ist das gerade ℓ^2 mit
$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle := \sum_{n=1}^\infty a_n \bar{b}_n$

5.4 Proposition: Sei H ein Prä-Hilbertraum. Setze $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x \in H$.

(a) Es gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

(b) Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$.
Hierbei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

(c) $\|\cdot\|$ ist eine Norm.

(d) Für $y \in H$ definiert $f_y(x) := \langle x,y\rangle$ ein Element im Dualraum H' mit $\|f_y\| = \|y\|$.

Beweis: (a) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \underbrace{\langle x,x\rangle}_{=\|x\|^2} + \underbrace{\langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle}_{=2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle} + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{=\|y\|^2}$

(b) o.E. $y \neq 0$ (sonst $\|y\|^2 = \langle y,y\rangle = 0$ und $\langle x,y\rangle = 0$)

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \overset{(a)}{=} \langle x,x\rangle + 2\operatorname{Re}\bar\lambda\langle x,y\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle$.

Mit $\lambda := -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ also

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\operatorname{Re}\frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} = \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$$

Da $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \ge 0$, folgt die Ungleichung. Außerdem:

$|\langle x,y\rangle|^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \iff \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = 0 \iff x = -\lambda y$

(c) $\|x\| \ge 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ✓

Dreiecks-Ungl.: $\operatorname{Re}\langle x,y\rangle \le |\langle x,y\rangle| \overset{(b)}{\le} \|x\|\|y\|$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 \overset{(a)}{\le} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

(d) f_y linear ✓, $|f_y(x)| = |\langle x,y\rangle| \overset{(b)}{\le} \|y\|\|x\| \Rightarrow \|f_y\| \le \|y\|$, d.h. $f_y \in H'$.
und $f_y(y) = \langle y,y\rangle = \|y\|^2 \Rightarrow \|f_y\| \ge \|y\|$. (1.23(d)) $\square$

5.5 Bemerkung: (a) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bloß positive hermitesche Form, so gilt dennoch (a) und die CS-Ungl. von 5.4. Ferner ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm.

(b) Die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ ist stetig (s. 1.18), sowie die Abbildungen $x \mapsto \langle x,y\rangle$ für feste $y \in H$ (ebenso $y \mapsto \langle x,y\rangle$), nach (d).

5.6 **Definition**: Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Prä-Hilbertraum. (s. 5.4(c))

5.7 **Beispiel**: (a) $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ sind Hilberträume (jeder endlichdimensionale Prä-HR ist HR).

(b) $\mathcal{C}[0,1]$ mit $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ ist kein Hilbertraum, denn $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig. Beachte aber, dass $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist. (Blatt 6)

(c) $L^2(X,\mu)$ mit $\langle f,g\rangle = \int_X f(x)\overline{g}(x)\,d\mu(x)$ ist HR, insbesondere ℓ^2.
Allgemein ist $\ell^2(I) := \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in \mathbb{C}, \sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty\}$ ein Hilbertraum mit $\langle (a_i),(b_i)\rangle := \sum_{i\in I} a_i \overline{b_i}$, I beliebige Indexmenge.

(d) Ist H ein Prä-Hilbertraum, so ist die Vervollständigung $\hat{H}$ ein Hilbertraum mit $\langle [(x_n)],[(y_n)]\rangle := \lim \langle x_n,y_n\rangle$

[denn $\langle x_n,y_n\rangle$ ist Cauchyfolge: $|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_m,y_m\rangle| \overset{C.S.}{\leq} \|x_n-x_m\|\|y_n\| + \|x_m\|\|y_n-y_m\|$
und $\|[(x_n)]\| = \sqrt{\langle [(x_n)],[(x_n)]\rangle} = \lim \sqrt{\langle x_n,x_n\rangle} = \lim \|x_n\|$ wie in 1.28

Die Vervollständigung von $(\mathcal{C}[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist $(L^2([0,1],\lambda), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(e) Ist $K \subseteq H$ abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraums, so ist K ein HR.

5.8 **Bemerkung**: Ist $x,y \neq 0$, so definiert $\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|} =: \cos\alpha$ einen „Winkel" $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}]$ zwischen x und y, mit x,y „senkrecht", falls $\langle x,y\rangle = 0$. (Blatt 6)

5.9 **Proposition**: (a) Ist H ein Prä-Hilbertraum, so gilt die Parallelogrammidentität:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x,y \in H$$

(b) Ist H ein $\mathbb{C}$-VR mit Sesquilinearform (z.B. Skalarprodukt, s. 5.2), so gilt $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle x+i^k y, x+i^k y\rangle \underset{\text{falls Skalarprod.}}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x+i^k y\|^2$ „Polarisierungsidentität"
Ist H ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprod., so gilt $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$.

(c) Ist H ein normierter Raum, so ist es ein Prä-Hilbertraum genau dann, wenn die Parallelogrammidentität gilt.
(Die Norm kommt dann also von einem Skalarprodukt.)

Beweis: (a) Blatt 6

(b) $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle x+i^k y, x+i^k y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\Big(\underbrace{i^k\langle x,x\rangle}_{=0 \text{ in der Summe}} + \langle x,y\rangle + \underbrace{i^{2k}\langle y,x\rangle}_{=0 \text{ in der Summe}} + \underbrace{i^k\langle y,y\rangle}_{=0 \text{ in der Summe}}\Big) = \langle x,y\rangle$

(c) „⇒" (a) „⇐" Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ definiere $\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x+i^k y\|^2$

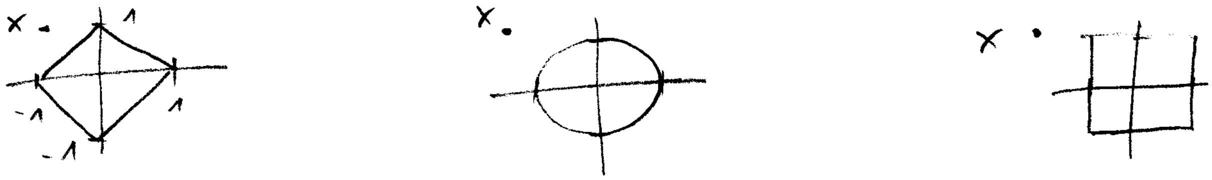
und rechne nach, dass dies ein Skalarprodukt ist (nicht trivial!) $\square$

Dank Prop. 5.9 weiß man nun also, wann eine Norm von einem Skalarprodukt kommt.

Wir lernen nun noch etwas über die Geometrie von Hilberträumen.

Denn: Sind die Kugeln dort rund? Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ betrachte

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$



Kugeln $\{y\in\mathbb{R}^2 \mid \|y\|\le 1\}$. Sei nun $x\notin$ Kugel. Gibt es ein eindeutiges Element $x_0\in$ Kugel mit $\|x-x_0\| = \inf\{\|x-y\| \mid y\in \text{Kugel}\}$?

Ja, für runde Kugeln $(\|\cdot\|_2)$, nein sonst $(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty)$.

(z.B. $x=(2,0)$. Dann $\|x-x_0^t\|_\infty = 1$ für alle $x_0^t = (1,t)$, $t\in[-1,1]$, nicht eind.)

5.10 Satz: Sei H ein Hilbertraum, $A\subseteq H$ konvex, abgeschlossen, $x\in H\setminus A$.

Dann gibt es genau ein $x_0\in A$ mit $\|x-x_0\| = \inf\{\|x-y\| \mid y\in A\} =: \operatorname{dist}(x,A)$.

Beweis: $d := \operatorname{dist}(x,A)$, $(y_n)\subseteq A$ mit $\|x-y_n\|\to d$. Dann ist (y_n) Cauchy:

Mit der Parallelogrammgleichung gilt für $z_n := y_n - x$:

$\|y_n-y_m\|^2 = \|z_n-z_m\|^2 \overset{5.9}{=} 2\left(\|z_n\|^2+\|z_m\|^2\right) - \|z_n+z_m\|^2$

$(z_n+z_m = y_n+y_m-2x)$ $\quad = 2\Big(\underbrace{\|y_n-x\|^2}_{\le d^2+\varepsilon} + \underbrace{\|y_m-x\|^2}_{\le d^2+\varepsilon}\Big) - 4\underbrace{\|\underbrace{\tfrac{1}{2}(y_n+y_m)}_{\in A \text{ da } A \text{ konvex}} - x\|^2}_{\ge d^2} \le 4\varepsilon$ für $n,m\ge N$

Somit konvergiert (y_n) gegen ein $x_0\in A$ (A abgeschlossen), $\|x-x_0\|=d$.

Eindeutigkeit: Ist $x_0'\in A$ mit $\|x-x_0'\|=d$, so ist

$(y_n) := (x_0, x_0', x_0, x_0', \ldots)$ eine Cauchyfolge (wie oben). Also $x_0 = x_0'$. $\square$

Ist nun $A \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum, so lässt sich das Bild noch verfeinern.

5.11 Definition: Sei H ein Hilbertraum (oder ein Prä-HR).

(a) $x, y \in H$ heißen orthogonal (schreibe $x \perp y$), falls $\langle x, y \rangle = 0$ (s. 5-8)

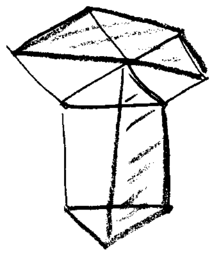
(b) $M_1, M_2 \subseteq H$ heißen orthogonal ($M_1 \perp M_2$), falls $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in M_1, y \in M_2$

(c) Ist $M \subseteq H$, so ist das orthogonale Komplement definiert durch $M^\perp := \{x \in H \mid x \perp M\}$.

5.12 Lemma (Satz von Pythagoras): Ist H ein Prä-HR, $x, y \in H$, $x \perp y$, dann gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Beweis: $\|x+y\|^2 = \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{=0} + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ □

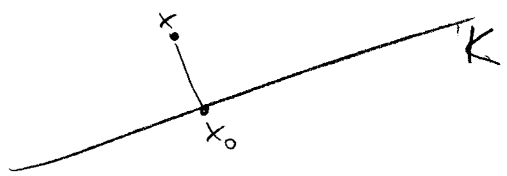
(ein altertümlicher Beweis:



)

5.13 Satz: Sei H ein Hilbertraum und $\mathbb{K} \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum. Für $x \in H$, $x_0 \in K$ gilt dann: $\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, K) \iff x - x_0 \perp K$.

In diesem Fall ist die Bestapproximation also genau durch den senkrecht stehenden Vektor gegeben:



Beweis: „⇒" Sei $y \in K$, $\|y\| = 1$, $z := x - x_0$. Z.z.: $\langle z, y\rangle = 0$.

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann $\|z\|^2 = \operatorname{dist}(x, K)^2 \le \|x - (\underbrace{x_0 + \alpha y}_{\in K})\|^2 = \|z - \alpha y\|^2$

$$= \underbrace{\langle z, z\rangle}_{=\|z\|^2} - \alpha\langle y, z\rangle - \bar{\alpha}\langle z, y\rangle + |\alpha|^2 \underbrace{\langle y, y\rangle}_{=1}$$

Mit $\alpha := \langle z, y\rangle$ also: $0 \le -|\alpha|^2$, d.h. $\alpha = 0$.

„⇐" Sei $y \in K$. Dann $\|x - y\|^2 = \|\underbrace{(x - x_0)}_{\perp K} + \underbrace{(x_0 - y)}_{\in K}\|^2 \overset{5.12}{=} \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2$

$$\ge \|x - x_0\|^2$$ □

Somit können wir Hilberträume gut zerlegen.

5.14 Lemma: Ist $M \subseteq H$ eine Teilmenge eines HRs, so ist $M^\perp \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum.

Beweis: $x \perp M$, $y \perp M \Rightarrow x+y \perp M$, Skalarprod. stetig. $\square$

5.15 Satz: Sei $K \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum eines HRs. Dann lässt sich H zerlegen als $H = K \oplus K^\perp$ („direkte Summe").

Hierbei heißt $H = K_1 \oplus K_2$ für zwei abgeschlossene Teilräume $K_1, K_2 \subseteq H$:

(1) $K_1 \perp K_2$, (2) $K_1 \oplus K_2 := \{x+y \mid x \in K_1, y \in K_2\} \subseteq H$

(3) $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, (4) Jedes $x \in K_1 \oplus K_2$ hat eine eindeutige Darstellung als $x = x_1 + x_2$, $x_i \in K_i$

Beweis: Nach 5.14 ist $K^\perp \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum; $K \perp K^\perp$ ✓

$K \cap K^\perp = \{0\}$, denn $x \in K \cap K^\perp \Rightarrow x \perp x$, d.h. $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ist nun $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ in $K_1 \oplus K_2$, so ist $\underbrace{x_1 - x_1'}_{\in K_1} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in K_2} \in K_1 \cap K_2$

$\Rightarrow x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$.

bzw. $H = K \oplus K^\perp$ (d.h. „$\subseteq$").

Sei $x \in H \overset{5.10}{\Rightarrow} \exists x_0 \in K$ mit $\|x - x_0\| = \mathrm{dist}(x, K) \overset{5.13}{\Rightarrow} x - x_0 \perp K$,

also $x - x_0 \in K^\perp$ und $x = x_0 + (x - x_0) \in K \oplus K^\perp$. $\square$

5.16 Bemerkung: (a) Sei H ein Prä-HR, $\emptyset \neq M \subseteq H$ eine Teilmenge. Dann ist $M \subseteq N \subseteq H \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$, $M^\perp = \bar{M}^\perp$, sowie $M^{\perp\perp} = \bar{M}$, falls $M \subseteq H$ ein Teilraum ist. (Bl. #6)

(b) Bestapproximationen in Banachräumen sind nicht eindeutig (i.A.), s. Motivation vor 5.10. Auch Zerlegungen $X = M \oplus N$ mit $M \cap N = \{0\}$ und $M + N = X$ eines Banachraums in Unterbanachräume $M, N \subseteq X$ ist i.A. nicht immer gegeben oder nicht eindeutig.

($\mathbb{R}^2 = — \oplus /$ oder $— \oplus |$ etc.)

z.B. ist ℓ^∞ nicht als $\ell^\infty = c_0 \oplus N$ zerlegbar.

Es gilt sogar: Ist X ein Banachraum und ist jeder TR komplementiert (d.h. es gibt einen zweiten TR, so dass ihre direkte Summe X ergibt), so ist X schon ein Hilbertraum.

Hilberträume haben unter allen Banachräumen also eine schöne Geometrie. Außerdem haben sie einen schönen Dualraum – sich selbst.

5.17 <u>Satz (Darstellungssatz von Riesz)</u>: Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung $j: H \to H'$, $y \mapsto f_y \leftarrow (5.4)$ ein antilinearer isometrischer Isomorphismus.

Also $H \cong H'$ und somit ist H reflexiv. Zu $f \in H'$ ex. also ein $y \in H$ st $f = f_y$.

<u>Beweis</u>: $j(\lambda y_1 + \mu y_2)(x) = \langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \bar{\lambda}\langle x, y_1\rangle + \bar{\mu}\langle x, y_2\rangle$
$= (\bar{\lambda}\, j(y_1) + \bar{\mu}\, j(y_2))(x)$

und $\|j(y)\| = \|f_y\| \overset{5.4}{=} \|y\|$, d.h. j isometrisch und somit auch injektiv.

Bzz. j surjektiv.

Sei $0 \neq f \in H'$. Also ist $\ker f \underset{\neq}{\subseteq} H$ ein abgeschlossener TR. $(f \neq 0)$

Nach 5.15 ist H also zerlegbar in $H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$.

Somit existiert ein $y \in (\ker f)^\perp$, $y \neq 0$, $f(y) = 1$ (denn $f(y) \neq 0$, normieren).

Somit ist $f(x)y - x \in \ker f$, d.h. $0 = \langle f(x)y - x, y\rangle = f(x)\|y\|^2 - \langle x, y\rangle$ $\forall x \in H$.

Setze $z := \frac{y}{\|y\|^2} \in H$. Dann $f = f_z$, denn

$f_z(x) = \langle x, z\rangle = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} = f(x) \quad \forall x \in H.$ □

5.18 <u>Beispiel</u>: Sei $f: L^2(X,\mu) \to \mathbb{C}$ ein lineares, stetiges Funktional. Also $f \in (L^2)'$, d.h. es gibt eine Funktion $g \in L^2(X,\mu)$ st $f = f_g$, d.h. $f(h) = f_g(h) = \langle h, g\rangle = \int_X h\bar{g}\, d\mu$.

Im Folgenden müssen wir uns noch ein bisschen mehr Gedanken machen über Summierbarkeit in HR, um den Begriff einer Darstellung bzgl. einer Basis zu entwickeln.

5.19 <u>Definition</u>: Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ möglicherweise überabzählbar! in einem normierten Raum X heißt <u>summierbar</u> zu $s := \sum_{i\in I} x_i \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J_0 \underset{\text{fin}}{\subseteq} I \text{ endliche Teilmenge } \forall I \underset{\text{fin}}{\supseteq} J \supseteq J_0 : \|\sum_{i\in J} x_i - s\| < \varepsilon$$

(Ist I abzählbar, so ist das der übliche Begriff von Reihen.)

5.20 <u>Bemerkung</u>: (a) Ist $(x_i)_{i\in I}$ summierbar, so können nur abzählbar viele Elemente $x_i \neq 0$ sein: Zu $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ex. $F_n \underset{\text{fin}}{\subseteq} I$, so dass $\|\sum_{i\in J} x_i - s\| < \frac{1}{n}$ für alle $F_n \subseteq J \underset{\text{fin}}{\subseteq} I$. Somit ist $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ abzählbar und für $i \in I\setminus F$ ist

$$\|x_i\| = \|\sum_{j\in F_n\cup\{i\}} x_j - \sum_{j\in F_n} x_j\| \le \underbrace{\|\sum_{F_n\cup\{i\}} x_j - s\|}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{\|\sum_{F_n} x_j - s\|}_{<\frac{1}{n}} < \frac{2}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow x_i = 0$.

(b) Man kann Summierbarkeit so formulieren, dass $(x_i)_{i\in I}$ summierbar zu s ist genau dann, wenn das Netz $(s_F)_{F \underset{\text{fin}}{\subseteq} I}$ gegen s konvergiert, wobei $s_F := \sum_{i\in F} x_i$. (Die Menge $\{F \underset{\text{fin}}{\subseteq} I\}$ ist gerichtet und geordnet.)

(c) Man kann überprüfen, dass die Rechenregeln gelten: Sind $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ summierbar in einem Prä-HR, so ist

$$\alpha(\sum_{i\in I} x_i) = \sum_{i\in I} \alpha x_i, \quad \sum_{i\in I}(x_i+y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i, \quad \langle \sum_{i\in I} x_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, y\rangle.$$

(Rechne auf endlichen Partialsummen $s_F = \sum_{i\in F} x_i$ und, z.B.
$\alpha s \leftarrow \alpha \sum_{i\in F} x_i = \sum_{i\in F} \alpha x_i$, $\quad \langle s_F, y\rangle \to \langle s, y\rangle$, da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stetig etc.)
$\langle s_F, y\rangle = \sum_{i\in F}\langle x_i, y\rangle$

(d) Wir haben in 1.30 gesehen, dass in einem Banachraum jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ summierbar ist, falls $(\|x_i\|)_{i\in\mathbb{N}}$ summierbar ist. Das kann man auch für beliebige Familien beweisen.

5.21 Lemma: Sei H ein Hilbertraum und $(x_i)_{i\in I}$ paarweise orthogonale Elemente in H. Dann ist $(x_i)_{i\in I}$ summierbar $\Longleftrightarrow$ $(\|x_i\|^2)_{i\in I}$ summierbar.

Beweis: $S_F := \sum_{i\in F} x_i$, $T_F := \sum_{i\in F} \|x_i\|^2$, $F \underset{fin}{\subseteq} I$. Also $\|S_F\|^2 = T_F$ (5.12).

"$\Rightarrow$" $S_F \to s \Rightarrow \underbrace{\|S_F\|^2}_{= T_F} \to \|s\|^2$, da die Norm stetig ist.

"$\Leftarrow$" $(S_F)_{F \underset{fin}{\subseteq} I}$ ist ein Cauchynetz (d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists F_0 \underset{fin}{\subseteq} I\ \forall F, G \supseteq F_0$ erfüllt: $\|S_F - S_G\| < \varepsilon$)

denn $\|S_F - S_G\| \le \sum_{i\in F\cup G\setminus F\cap G} \|x_i\| = |T_{F\cup G} - T_{F\cap G}| < \varepsilon$ für $F, G \supseteq F_0$

Wählt man nun $F_n \underset{fin}{\subseteq} I$, so dass $\|S_F - S_G\| < \frac{1}{n}$ für $F, G \supseteq F_n$ erfüllt und $F_n \subseteq F_{n+1}$, dann ist $(S_{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d.h. $S_{F_n} \to s$ in H.

$\Rightarrow \|S_F - s\| \le \underbrace{\|S_F - S_{F_n}\|}_{< \frac{1}{n} < \varepsilon} + \underbrace{\|S_{F_n} - s\|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$ für $F \supseteq F_n$ $\square$

5.22 Definition: Eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ in einem Hilbertraum H heißt Orthonormalsystem, falls $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. (ONS)

5.23 Lemma: Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein ONS in einem HR H und sei $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ (d.h. $(\alpha_i e_i)_{i\in I}$ ist summierbar zu x).

Dann ist $\alpha_i = \langle x, e_i\rangle\ \forall i$.

Beweis: $S_F := \sum_{i\in F} \alpha_i e_i$, $F \underset{fin}{\subseteq} I$. Dann $\langle S_F, e_k\rangle = \sum_{i\in F} \alpha_i \underbrace{\langle e_i, e_k\rangle}_{=\delta_{ik}} = \alpha_k$ falls $k \in F$. Also $\langle x, e_k\rangle \longleftarrow \underbrace{\langle S_F, e_k\rangle}_{= \alpha_k}$ ab einem $F \underset{fin}{\subseteq} I$. $\square$

5.24 Satz (Besselsche Ungleichung): Sei $(e_i)_{i\in I}$ ONS in H.

Dann gilt die Besselsche Ungleichung $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2$ $\forall x \in H$.

Hierbei gilt Gleichheit genau dann, wenn $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$.

<u>Beweis:</u> Wir beweisen dies nur für $I = \mathbb{N}$, aber für beliebige (auch überabzählbare) Indexmengen gilt es analog mit Rechnungen wie in 5.23.

Setze $s_n := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ (bzw. $s_F := \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i$, $F \underset{fin}{\subseteq} I$)

Dann $\langle s_n, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \delta_{ik} = \langle x, e_k \rangle$ für $1 \le k \le n$

$\Rightarrow \langle x - s_n, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \le n$, d.h. $\langle x - s_n, s_n \rangle = 0$

$$\overset{\text{Pythagoras}}{\Longrightarrow} \|x\|^2 = \underbrace{\|x - s_n\|^2}_{\ge 0} + \|s_n\|^2 \ge \|s_n\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\Big\|^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \sum \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \le \|x\|^2$ (insbes. konv. die Summe)

Und $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \iff x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \to 0$, $n \to \infty$

$$\overset{5.21}{\iff} \Big\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\Big\|^2 \to 0, \quad n \to \infty$$

("$\Rightarrow$" Stetigkeit der Norm
"$\Leftarrow$" $\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \underset{\|x\|^2}{\underset{\downarrow}{\|s_n\|^2}}$)

$$\iff \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \qquad \square$$

5.25 <u>Satz (Parseval)</u>: Sei $(e_i)_{i \in I}$ ONS in H. Dann sind äquivalent:

(i) $(e_i)_{i \in I}$ ist ein maximales ONS (d.h. nicht enthalten in einem größeren)

(ii) Gilt $x \perp e_i \ \forall i \in I$, so ist $x = 0$

(iii) $\forall x \in H$ ist $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

(iv) $\forall x \in H$ ist $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$

(v) Das lineare Erzeugnis $\{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in H.

Ist eine (und damit alle) der äquivalenten Bedingungen erfüllt, so heißt $(e_i)_{i \in I}$ eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB).

Beweis: (i)⇒(ii): Sei $x \neq 0$, $x \perp e_i \ \forall i$. Dann $(e_i)_{i\in I} \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ größeres ONS

(ii)⇒(i): Wäre $(e_i)_{i\in I} \subsetneq (e_i)_{i\in I'}$, $I \subsetneq I'$, so gäbe es $x \perp e_i \ \forall i$, $x \neq 0$.

(iii)⇔(iv): 5.24.

(iv)⇒(ii): $x \perp e_i \ \forall i \Rightarrow \|x\|^2 = \sum |\underbrace{\langle x, e_i\rangle}_{=0 \ \forall i}|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii)⇒(iii): Nach 5.24 konvergiert $\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$. Setze $z := x - \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$.

Dann $\langle z, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0 \ \forall j \Rightarrow z = 0$

(iii)⇒(v): ✓

(v)⇒(iv): $x_n = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_{j,n} e_j$ mit $x_n \to x$. Dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \longleftarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\underbrace{\langle x_n, e_i\rangle}_{=\begin{cases}\alpha_{i,n} & i\le N_n\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}}|^2 = \sum_{i=1}^{N_n} |\alpha_{i,n}|^2 = \|x_n\|^2 \longrightarrow \|x\|^2.$$

□

5.26 Bemerkung: Ist $(e_i)_{i\in I}$ eine ONB, so sind die e_i linear unabh.

($\sum_{i\in I} \alpha_i e_i = 0$ für endlich viele $\alpha_i \neq 0$. Dann $0 = \langle \sum \alpha_i e_i, e_j\rangle = \alpha_j \ \forall j$)

Eine ONB ist jedoch keine (VR-)Basis, da die Elemente nur in unendlichen Linearkombinationen erzeugt werden (bei einer Basis ist $\{\sum_{i}^{N} \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}\} = H$, bei einer ONB nur dicht).

Im Folgenden werden wir von einer ONB oft nur als „Basis" sprechen – das ist dann nicht mit einer VR-Basis zu verwechseln.

Eine ONB bestimmt also die Vektoren eines HRs vollständig. Ist sie eindeutig? Wohl kaum. Aber ihre Kardinalität?

5.27 Satz: Sei H ein HR und $(e_i)_{i\in I}$, $(f_j)_{j\in J}$ zwei ONB.

Dann ist $|I| = |J|$.

Beweis: Für $|I| < \infty$ ist die ONB eine VR-Basis, also auch $|J| < \infty$ und $|I| = |J|$ nach LA.

Für $|I|, |J| = \infty$ ist $I_j := \{i \in I \mid \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\}$ abzählbar $\forall j \in J$ (5.20(a))

$\Rightarrow I = \bigcup_{j\in J} I_j$, d.h. $|I| \le |J|$, ebenso $|J| \le |I|$ (Schröder–Bernstein). □

5.28 Satz: Jeder HR besitzt eine ONB.

Beweis: Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein ONS in H. Die Menge der ONS, die dieses enthalten, ist induktiv geordnet $\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ es ex. ein maximales. □

5.29 Def./Ann.: Sei H ein Hilbertraum. Dann ist seine Dimension $\dim H$ definiert als die Mächtigkeit einer ONB von H.
Ist $\dim H$ abzählbar, so heißt H separabel.

5.30 Bemerkung: Mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren kann man zeigen, dass ein Hilbertraum genau dann separabel ist, wenn er als Banachraum separabel ist, also eine abzählbar dichte Teilmenge besitzt. Besitzt H nämlich eine abzählbare ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i e_i \mid \alpha_i\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}, N\in\mathbb{N}\}$ abzählbar und dicht in H. Ist umgekehrt eine abzählbare Menge $E\subseteq H$ gegeben, die dicht ist, so wählt man daraus eine maximale linear unabhängige Teilmenge $x_1, x_2, \dots$ und wendet folgendes Verfahren an:

$$e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_{n+1} := \frac{x_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}\langle x_{n+1},e_i\rangle e_i}{\|\dots\text{Norm dessen}\dots\|} \quad \underset{\text{da l.u.}}{\neq 0}$$

So erhält man ein abzählbares ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das nach 5.25 ONB ist.

5.31 Beispiel: $\dim\mathbb{C}^n = n$, $\dim \ell^2 = \infty$ abzählbar unendlich ($(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ONB), $e_n = (0,\dots,0,\underset{n}{1},0,\dots)$

5.32 Def./Ann.: Seien H und K Hilberträume. Ein Isomorphismus zwischen H und K ist eine lineare Abbildung $U: H\to K$, die surjektiv ist und $\langle Ux, Uy\rangle_K = \langle x,y\rangle_H$ $\forall x,y\in H$ erfüllt.

5.33 Bemerkung: Da $\|Ux\|^2 = \langle Ux,Ux\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$ gilt, ist U nicht nur stetig, sondern sogar isometrisch, d.h. injektiv. Außerdem wird die HR-spezifische Struktur, nämlich die Lage der Vektoren erhalten. Ist $\dim H = \dim K < \infty$, so muss die Surjektivität von U nicht gefordert werden (LA), für $\dim H = \dim K = \infty$ hingegen schon.

5.34 <u>Satz</u>: Zwei Hilberträume H und K sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Hilbertraumdimension haben.

<u>Beweis</u>: „⇒": Ist $U: H \to K$ ein Isomorphismus und $(e_i)_{i\in I}$ eine ONB von H, so ist $(Ue_i)_{i\in I}$ ein ONS in K. Ist nun $y \perp Ue_i \; \forall i \in I$, so ex. ein $x \in H$ mit $Ux = y$. Dann $\langle x, e_i\rangle = \langle Ux, Ue_i\rangle = \langle y, Ue_i\rangle = 0 \; \forall i \overset{5.25}{\Rightarrow} x = 0$, d.h. $y = 0$.
Somit ist $(Ue_i)_{i\in I}$ sogar eine ONB, also $\dim H \leq \dim K$.
Da auch $U^{-1}: K \to H$ ein Isomorphismus ist, gilt „=".
„⇐": Seien $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_j)_{j\in J}$ ONB von H bzw. K mit $|I| = |J|$. O.E. $I = J$. Dann definiert $Ue_i := f_i$ einen Isom. $\square$

5.35 <u>Korollar</u>: Jeder separable HR ist also isomorph zu $\mathbb{C}^n$ oder zu ℓ^2. Es gibt bis auf Isomorphie nur einen einzigen separablen unendlich-dimensionalen HR! Allgemeiner ist H mit ONB $(e_i)_{i\in I}$ isomorph zu $\ell^2(I)$ vermöge
$$H \to \ell^2(I), \quad x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$$ (nach 5.25).

5.36 <u>Beispiel</u>: (a) ONB für $\mathbb{C}^n$ ist $e_1, \ldots, e_n$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

(b) ONB für ℓ^2 ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$
Dies ist eine ONB, jedoch keine VR-Basis! (Vergleiche auch 4.3)

(c) Was ist eine ONB für $L^2([0,1], \lambda)$? Finde Funktionen f_i mit $\langle f_i, f_j\rangle = \int f_i \overline{f_j} \, d\lambda = \delta_{ij}$.
Dazu benötigen wir den Satz von Stone-Weierstraß.

Exkurs: Der Satz von Stone-Weierstraß

Weierstraß (1895): Kann man stetige Funktionen $f \in \mathcal{C}[0,1]$ bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm durch „einfachere" Funktionen approximieren? Die einfachsten Funktionen sind Polynome und die Antwort ist ja (Approximationssatz von Weierstraß, s. auch A II, 15.4, Fuchs).

Stone (1948): Für den Beweis sind nur sehr wenige, sehr algebraische Eigenschaften notwendig. Weierstraß' Satz ist daher stark verallgemeinerbar.

Im Folgenden betrachten wir $\mathcal{C}(K) := \{f : K \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$, wobei K ein kompakter, metrischer Raum ist, versehen mit $\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|$.
Dann ist $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

E.1 Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ heißt <u>$*$-Unteralgebra mit Eins</u>, falls:

(i) $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$
(ii) $f, g \in A,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in A$
(iii) $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$
(iv) $1 \in A \quad (1(x) :\equiv 1 \quad \forall x \in K)$

A heißt <u>punktetrennend</u>, falls $\forall s, t \in K, s \neq t\ \exists f \in A : f(s) \neq f(t)$.

E.2 Beispiel: Die Menge $P \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ aller Polynome auf $[0,1]$ in x und $\bar{x}$ ist eine punktetrennende $*$-Unteralgebra mit Eins.
Betrachtet man die Polynome in x in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$ (reellwertige Fkt.), so ist dies ebenfalls der Fall.

E.3 Satz von Stone-Weierstraß. Sei K ein kompakter, metrischer Raum und $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ eine punktetrennende $*$-Unteralgebra mit Eins.
Dann ist A dicht in $\mathcal{C}(K)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Ist A also schon abgeschlossen, so ist $A = \mathcal{C}(K)$.
Gleiches gilt für $A \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ (ohne (iii) von E.1).

Sei A abgeschlossen. (Sonst auch $\bar{A}$ punkttrennende *-Unteralg. mit $1 \in A$)

<u>Beweis</u>: 1.) Ist $f \in A, f \geq 0$, so ist auch $\sqrt{f} \in A$.

Bew. von 1.): Sei $0 \leq f \leq 1$. Setze $g := 1 - f$, also $0 \leq g \leq 1$.

Dann ist $\sqrt{f(t)} = \sqrt{1-g(t)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(t)^n \quad \forall t \in K$ (Taylorreihe von $\sqrt{1-x}$ um $x=0$)

mit $a_n = \frac{1}{2n-1} 2^{-2n+1} \binom{2n-1}{n} < c \cdot n^{-\frac{3}{2}}$ für ein $c > 0$ (Stirling)

Da die Taylorreihe für $\sqrt{1-x}$ auf $[-1,1]$ gleichmäßig konvergiert,

gilt also $h_m := 1 - \sum_{n=1}^{m} a_n g^n \in A$ und $h_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \sqrt{f}$ in $\|\cdot\|_\infty$.

Da A abgeschlossen ist, ist $\sqrt{f} \in A$. Ist $f \not\leq 1$: Reskalieren. $\square$ (1.)

2.) Sind $f, g \in A$ reellwertig, so ist $\max(f,g), \min(f,g) \in A$.

Bew. von 2.): $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$, $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$

und $|f| = \sqrt{f\bar{f}} \overset{1.)}{\in} A$. $\square$ (2.)

3.) Sei $f \in \mathcal{C}(K)$ reellwertig und $\varepsilon > 0$. Dann ex. $g \in A$, $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

Bew. von 3.): Zu $s \neq t$ in K ex. $f_{s,t} \in A$ mit $f_{s,t}(s) = f(s)$, $f_{s,t}(t) = f(t)$.

Da A punkttrennend ist, gibt es nämlich ein $h \in A$ mit $h(s) \neq h(t)$.

Setze $f_{s,t}(x) := f(t) + (f(s) - f(t)) \cdot \frac{h(x) - h(t)}{h(s) - h(t)}$.

Setze $U_t := \{x \in K \mid f_{s,t}(x) < f(x) + \varepsilon\}$. Dann ist U offen

(denn $(f_{s,t} - f)^{-1}(\varepsilon, \infty)$ ist offen). Außerdem ist $t \in U_t$.

Damit ist $(U_t)_{t \in K}$ eine offene Überdeckung von K, d.h. es gibt

$t_1, \dots, t_n \in K$ mit $K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$. Setze $h_s := \min_{1 \leq i \leq n} f_{s,t_i} \in A$.

Setze $V_s := \{x \in K \mid h_s(x) > f(x) - \varepsilon\}$ offen, $s \in V_s$ $(h_s(s) = f(s))$

$\Rightarrow \exists s_1, \dots, s_m \in K$ mit $K = \bigcup_{j=1}^{m} V_{s_j}$. Setze $g := \max_{1 \leq j \leq m} h_{s_j} \in A$.

Sonst ist $h_{s_j} < f + \varepsilon \ \forall j$, d.h. $g < f + \varepsilon$ und $g > f - \varepsilon$, d.h. $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. $\square$ (3.)

4.) Sei $f \in \mathcal{C}(K)$ beliebig. Nach 3.) ex. $(g_n), (h_n) \in A$ mit

$g_n \to \operatorname{Re} f$, $h_n \to \operatorname{Im} f \Rightarrow \underbrace{g_n + i h_n}_{\in A} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. $\square$

E.4 Korollar: Die Algebra aller Polynome ist dicht in $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$.
(Weierstraß)

E.5 Bemerkung: Betrachtet man $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$, wobei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$ alle Polynome sind, oder $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}[0,1]$, so ist dies kein Banachraum nach Blatt 5. Und tatsächlich, die Vervollständigung ist ja $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ bzw. $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$!

E.6 Korollar: (a) Die Menge der Polynome $\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ ist dicht in $\mathcal{C}(S^1)$, wobei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$.
Hierbei ist $z^n := \bar{z}^{-n}$ für $n < 0$.
(b) Die Menge der Funktionen $e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $t \in [0,2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$ ist eine ONB für $L^2([0,2\pi], \lambda)$.
(c) Der Hilbertraum $L^2[0,2\pi]$ ist isomorph zu ℓ^2. Ebenso $L^2[0,1]$.

Beweis: (a) $\{\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n \mid a_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}(S^1)$ punktetrennende $*$-Unteralg. mit Eins.
(Beachte $z^n z^m = z^{n+m}$, selbst für $z^n \bar{z}^{-m}$, denn $z\bar{z} = 1$.)
(b) Sei $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi] = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ stetig, $f(0) = f(2\pi)\}$.
Sei $\Phi : \mathcal{C}_{per}[0,2\pi] \to \mathcal{C}(S^1)$ mit $\Phi(f)(e^{it}) := f(t)$ für $t \in [0,2\pi]$.
Dann ist Φ isometrisch, surjektiv und $\Phi(\sqrt{2\pi}\, e_n)(z) = z^n$.
$\left(\Phi(\sqrt{2\pi}\, e_n)(e^{it}) = \sqrt{2\pi}\, e_n(t) = e^{int} = (e^{it})^n, \quad z = e^{it} \right)$
Da Φ linear ist, werden also endliche Linearkombinationen von e_n auf Polynome $\sum a_n z^n$ abgebildet, und sind daher dicht in $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi]$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Da $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(t)|^2}_{\leq \|f\|_\infty} dt \leq 2\pi \|f\|_\infty^2$ ist, sind endliche Linearkombinationen von e_n also auch dicht in $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi]$ bzgl. $\|\cdot\|_2$.
($f \in \mathcal{C}_{per}[0,2\pi]$. Dann ex. $g \in \{\sum a_n e_n\}$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|f - g\|_2 < 2\pi\varepsilon$)
Es gilt: $\mathcal{C}_{per}[0,2\pi] \subseteq \mathcal{C}[0,2\pi] \subseteq L^2[0,2\pi]$ dicht.
(denn in L^2 ist $\|f - g\|_2 = 0$ für $f \in \mathcal{C}[0,2\pi]$ und $g(x) := \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < 2\pi \\ f(0) & x = 2\pi \end{cases}$)

bzw.: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein ONS bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $L^2[0,2\pi]$.
(Nach 5.25 und da Lin.komb. dicht in L^2 sind: auch ONB)

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^{2\pi} e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \delta_{nm}$$

(c) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine abzählbare ONB von $L^2[0,2\pi]$, daher $L^2[0,2\pi]\cong \ell^2$ als HRe. $L^2[0,1]\cong L^2[0,2\pi]$

$$f \longmapsto \cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}}\, f\circ h, \quad h(t)=\frac{1}{2\pi}t$$

E.7 <u>Bemerkung</u>: Ist $f\in C[0,2\pi]$, so ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ die zugehörige Fourierreihe. Die obige ONB von $L^2[0,2\pi]$ ist also einfach die Darstellung als Fourierreihe. Beachte: Die Approximation im HR-Sinne ist jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm. Die punktweise oder glm. Konvergenz (für die man sich bei Fourierreihen sonst oft interessiert) ist hingegen viel schwieriger.