§6 Beschränkte Operatoren auf Hilberträumen

Um $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ins Unendlichdimensionale zu verallgemeinern, ist das Konzept von Hilberträumen gut (siehe $\langle Ae_i, e_j \rangle$ als „Matrixkoeff."). Wie sieht also $\mathcal{L}(H,K)$ bzw. $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H,H)$ für Hilberträume aus?

6.1 <u>Erinnerung</u>: Ist H ein Hilbertraum, so ist $\mathcal{L}(H)$ ein normierter Vektorraum, versehen mit der Operatornorm (1.22, 1.23, 1.26). $\mathcal{L}(H)$ ist sogar ein Banachraum (1.26) und eine Algebra per $S \cdot T := S \circ T$. Es gilt dann $\|ST\| \le \|S\| \|T\|$. (1.29)

6.2 <u>Beispiel</u>: (a) Ist $H = \mathbb{C}^n$ und $e_1, \dots, e_n$ die kanonische ONB von $\mathbb{C}^n$, so ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ eindeutig bestimmt durch $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$.
Insofern ist $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$ $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$
$A \leftrightarrow (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

(b) Ist $H = L^2([0,1], \lambda)$ und $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig (oder allgemeiner: $k \in L^2([0,1] \times [0,1], \lambda^2)$, d.h. $\int_0^1 |k(s,t)|^2 \, ds\, dt < \infty$), so definiert $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $(Kf)(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$ einen beschränkten Operator $K \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$, denn K ist linear und

$$\|Kf\|^2 = \int_0^1 |(Kf)(s)|^2 \, ds = \int_0^1 \underbrace{\left| \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt \right|^2}_{= |\langle k(s,\cdot), \bar f \rangle_{L^2[0,1]}|^2 \overset{C.S.}{\le} \int |k(s,t)|^2 dt \cdot \underbrace{\int |f(t)|^2 dt}_{\|f\|_2^2}} ds$$

$$\le \underbrace{\iint |k(s,t)|^2 \, ds\, dt}_{= \|k\|^2_{L^2 \times L^2}} \cdot \|f\|_2^2 \qquad \left(\text{oder für } k \text{ stetig: } \int_0^1\int_0^1 \underbrace{|k(s,t)|^2}_{\le \|k\|_\infty} ds\, dt \le \|k\|_\infty\right)$$

$\Longrightarrow \|K\| \le \|k\|_{L^2 \times L^2}$ „<u>Integraloperator</u> mit Kern k"

Idee: K hat „kontinuierliche Matrix", denn obige Rechnung geht analog auch für $L^2(X, \mu)$. Ist nun $X = \{1, 2, \dots, n\}$ und $\mu(\{t\}) \equiv 1$, so ist für $e_i(t) := \begin{cases} 1 & t = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gerade:

$$Ke_i(s) = \sum_{t=1}^n k(s,t) e_i(t) = k(s,i) = \sum_{j=1}^n k(j,i) e_j(s) \quad (\text{wie in (a)}).$$

6.3 Erinnerung: Sind E, F normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so gibt es genau eine Abbildung $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ mit $\langle x, Ty \rangle_{F' \times F} = \langle T'x, y \rangle_{E' \times E}$ $\forall x \in F', y \in E$ und $\|T'\| = \|T\|$ (3.6).

Ist H nun ein Hilbertraum, so gilt $H \cong H'$ nach 5.17. Wie sieht also T' als Abbildung zwischen Hilberträumen aus?

6.4 Proposition: Seien H, K Hilberträume, $A \in \mathcal{L}(H,K)$. Dann gibt es genau einen beschränkten Operator $A^* \in \mathcal{L}(K,H)$ mit

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall x \in H, y \in K.$$

Beweis: Betrachte $f : \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \langle Ax, y \rangle \end{array}$. Dann ist f linear und beschränkt, denn $|f(x)| = |\langle Ax, y \rangle| \overset{C.S.}{\leq} \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\| \ \forall x$

$\Longrightarrow \|f\| \leq \|A\| \|y\| \overset{5.17}{\Longrightarrow} \exists! \, z_y \in H$, so dass $f = f_{z_y}$,

d.h. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z_y \rangle$. Setze $A^* y := z_y$.

Dann ist A^* linear:

$$\langle x, A^*(\lambda y_1 + \mu y_2) \rangle = \langle Ax, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle Ax, y_1 \rangle + \bar{\mu} \langle Ax, y_2 \rangle = \langle x, \lambda A^* y_1 + \mu A^* y_2 \rangle$$

Und A^* beschränkt: $\|A^* y\| = \|z_y\| \overset{5.4}{=} \|f\| \leq \|A\| \|y\| \ \forall y$.

$\Longrightarrow \|A^*\| \leq \|A\|$ $\square$

6.5 Bemerkung: A^* ist im Wesentlichen $A' : K' \to H'$ und $\|A^*\| = \|A\|$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "A^*"] \arrow[d, "j_K"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \arrow[d, "j_H"] \\ K' \arrow[r, "A'"] & H' \end{tikzcd}$$

Denn $(A' \underbrace{j_K x}_{\overset{5.17}{=} f_x})(y) = (f_x \circ A)(y) = \langle Ay, x \rangle = \langle y, A^* x \rangle$
$= f_{A^* x}(y) = (j_H(A^* x))(y)$

$\forall x \in K, y \in H \quad \Longrightarrow A' \circ j_K = j_H \circ A^*$

Also $\|A^*\| = \|j_H^{-1} \circ A' \circ j_K\| \overset{5.17}{=} \|A'\| \overset{3.6}{=} \|A\|$.

6.6 Proposition: Die Abbildung $^*: \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ ist

(i) antilinear: $(\mu A + \nu B)^* = \bar{\mu} A^* + \bar{\nu} B^*$, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$

(ii) isometrisch: $\|A^*\| = \|A\|$

(iii) involutiv: $A^{**} = A$

(iv) und erfüllt $(AB)^* = B^* A^*$

(v) sowie die „C^*-Norm-Bedingung": $\|A^*A\| = \|A\|^2$

(vi) Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ invertierbar (d.h. $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$), so ist auch A^* invertierbar und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. $(1x = x)$

Beweis: Es gilt: Ist $\langle Ax, y\rangle = 0$ $\forall x, y \in H$, so ist $A = 0$.

$(\langle Ax, \underbrace{Ax}_{=y} \rangle = 0 \Rightarrow Ax = 0 \quad \forall x)$

Also gilt: $\langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle \ \forall x,y \Rightarrow A = B$.

Damit können (i), (iii), (iv) und (vi) direkt nachgerechnet werden, z.B.

$\langle A^{**}x, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle \quad \forall x,y$

oder $\langle (AB)^*x, y\rangle = \langle x, ABy\rangle = \langle A^*x, By\rangle = \langle B^*A^*x, y\rangle$.

Aus $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \overset{C.S.}{\leq} \|A^*Ax\|\|x\| \quad \forall x \in H$

folgt $\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \overset{1.29}{\leq} \|A^*\|\|A\| \overset{6.5}{=} \|A\|^2$, d.h. (v). $(6.5 \Rightarrow (iii))$

□

6.7 Beispiel: (a) $H = \mathbb{C}^n$, $A^* = (\bar{a}_{ji})_{1 \leq i,j \leq n}$, denn

$\langle A^*e_j, e_i\rangle = \langle e_j, Ae_i\rangle = \langle e_j, \sum_k a_{ki} e_k\rangle = \sum_k \bar{a}_{ki} \langle e_j, e_k\rangle = \bar{a}_{ji}$

(b) $H = L^2[0,1]$, K^* ist der Integraloperator mit $(s,t) \overset{k^*}{\longmapsto} \overline{k(t,s)}$.

$\langle K^*f, g\rangle = \langle f, Kg\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{Kg(t)}\,dt = \iint f(t)\overline{k(t,s)}\,\overline{g(s)}\,dt\,ds$

$= \int (K_{k^*}f)(s)\overline{g(s)}\,ds = \langle K_{k^*}f, g\rangle$.

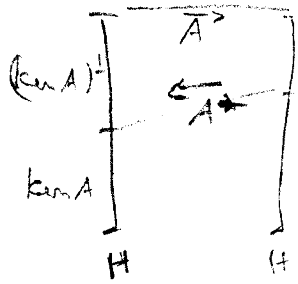
6.6 Proposition: Ist $A \in \mathcal{L}(H)$, so gilt

$$\ker A = (\operatorname{Bild} A^*)^\perp \quad \text{und} \quad (\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{Bild} A^*}$$

Beweis: $x \in (\operatorname{Bild} A^*)^\perp$

$$\iff \underbrace{\langle x, A^* y \rangle}_{= \langle Ax, y \rangle} = 0 \quad \forall y \in H$$

$$\iff Ax = 0, \text{ d.h. } x \in \ker A$$



Nach Blatt 6, A3 ist $\overline{\operatorname{Bild} A^*} = (\operatorname{Bild} A^*)^{\perp\perp} = (\ker A)^\perp$. □

6.7 Definition: (1) Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt selbstadjungiert oder hermitesch, falls $A = A^*$.

(2) $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt normal, falls $A^*A = AA^*$.

(3) $U \in \mathcal{L}(H)$ heißt unitär, falls $UU^* = U^*U = 1$.

(4) $V \in \mathcal{L}(H)$ heißt isometrisch, falls $V^*V = 1$.

(5) $P \in \mathcal{L}(H)$ heißt (orthogonale) Projektion, falls $P^* = P = P^2$.

Im Folgenden werden wir kennenlernen, wie viele Eigenschaften von Operatoren durch algebraische Gleichungen wie oben beschrieben werden können.

6.8 Beispiel: (a) $V^*V = 1 \iff \underbrace{\langle V^*Vx, y \rangle}_{= \langle Vx, Vy \rangle} = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y$

(b) U unitär, dann U invertierbar (mit $U^{-1} = U^*$), also insbesondere isometrisch und surjektiv. Nach S.32 also Isomorphismus von H.
Ist umgekehrt U surjektiv und isometrisch (also ein Isomorphismus gemäß S.32), so ist auch U^* isometrisch:

$$\langle U^*x, U^*y \rangle \underset{\uparrow\, U \text{ surj.}}{=} \langle U^*(Ux'), U^*(Uy') \rangle \underset{\uparrow\, U^*U = 1}{=} \langle x', U^*Uy' \rangle = \langle Ux', Uy' \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\implies \underbrace{(U^*)^*(U^*)}_{= UU^*} = 1.$$

6.9 <u>Bemerkung</u>: Ist $A = A^*$ (also A selbstadjungiert), so ist $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x \in H$, denn $\overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle$.

Außerdem gilt $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$ (Blatt 8).

(Erinnerung: Nach 1.23 gilt $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\}$ und $\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax, Ax\rangle}$)