§7 Spektralwerte beschränkter Operatoren

Motivation: Sei $A\in M_n(\mathbb{C})$, $A=A^*$. Dann ist A unitär äquivalent zu $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ Matrix der Eigenwerte.

Solche Matrizen sind durch ihre Eigenwerte (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

Betrachte nun für $k\in L^2([0,1]\times[0,1])$ die Fredholmsche Integralgleichung

$$\int k(s,t)f(t)\,dt - \lambda f(t) = g(t)$$

wobei g gegeben ist und $\lambda\in\mathbb{C}$ eine Randwertbedingung ist.

Was ist f? (Existenz und Eindeutigkeit)

Abstrakt ($\to$ 6.2): $Kf-\lambda f=g$ gesucht, also $f=(K-\lambda 1)^{-1}g$, sofern $K-\lambda 1$ invertierbar ist.

Im Endlichdimensionalen: λ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $\exists x\neq 0$ $\underbrace{(A-\lambda 1)x=0}_{\Leftrightarrow Ax=\lambda x}$ bzw. $A-\lambda 1$ nicht injektiv.

Genauer: λ Eigenwert $\Leftrightarrow$ $A-\lambda 1$ nicht invertierbar.

Aber im Unendlichdimensionalen: T inj. $\not\Leftrightarrow$ T surj. $\not\Leftrightarrow$ T invertierbar.

7.1 Definition: (i) Eine Algebra über $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum A, der zusätzlich eine bilineare, assoziative Multiplikation besitzt und $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$ $\forall x,y\in A$, $\lambda\in\mathbb{C}$ erfüllt.

(ii) Eine normierte Algebra ist eine Algebra A, die ein normierter Vektorraum ist und $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$ $\forall x,y\in A$ erfüllt.

(iii) Eine Banachalgebra ist eine vollständige, normierte Algebra.

7.2 Beispiel: (a) $\mathcal{L}(H)$ für H Hilbertraum (6.1) oder sogar H Banachraum.

(b) Ist X kompakter Raum, so ist $(C(X),\|\cdot\|_\infty)$ eine Banachalgebra.

7.3 Bemerkung: In einer normierten Algebra ist die Multiplikation stetig. (wie 1.18)

7.4 Definition: Sei A eine Banachalgebra mit 1, $x \in A$.

(i) $\operatorname{Sp} x := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - x$ ist nicht invertierbar$\} \subseteq \mathbb{C}$ „Spektrum von x"

(ii) $\rho(x) := \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} x$ „Resolventenmenge von x"

7.5 Bemerkung: Ist $A = \mathcal{L}(H)$, so ist auch ein Eigenwert definierbar: Ist $T \in \mathcal{L}(H)$, so ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T, falls es ein $0 \neq x \in H$ gibt, so dass $Tx = \lambda x$ gilt, d.h. $(\lambda 1 - T)$ ist nicht injektiv – und also auch nicht invertierbar.

Somit $\underbrace{\{\text{Eigenwerte von } T\}}_{=: \sigma_p(T)} \subseteq \operatorname{Sp} T$ „Punktspektrum"

Ist $\dim H < \infty$, so gilt $\sigma_p(T) = \operatorname{Sp} T$, aber für $\dim H = \infty$ ist sowohl $\sigma_p(T) \subsetneq \operatorname{Sp} T$ als auch $\sigma_p(T) = \emptyset$ möglich (aber immer: $\operatorname{Sp} T \neq \emptyset$, s. später)

7.6 Beispiel: Sei $X = C[1,2]$. Dann ist $\mathcal{L}(X)$ eine Banachalgebra mit 1 (1.26, 1.29). Betrachte $T: X \to X$ mit $(Tf)(t) := t f(t)$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X)$ (mit $\|T\| = 2$) und $\sigma_p(T) = \emptyset$, denn $Tf = \lambda f \Rightarrow t f(t) = \lambda f(t) \ \forall t \in [1,2]$

$\Rightarrow f(t) = 0 \ \forall t \neq \lambda \Rightarrow f = 0.$

Insbesondere $\lambda - T$ injektiv $\forall \lambda \in [1,2]$. Surjektiv?

$\lambda \in [1,2]$: $g(t) :\equiv 1 \ \forall t \in [1,2]$. A: $\lambda - T$ surjektiv, dann ex. f mit $1 = (\lambda - T) f(t) = \lambda f(t) - t f(t) = (\lambda - t) f(t)$. Aber Nullstelle bei $\lambda = t$! ↯

$\Rightarrow \operatorname{Sp} T \supseteq [1,2]$

$\lambda \notin [1,2]$: $(\lambda - T)^{-1}$ gegeben durch $((\lambda - T)^{-1} f)(t) = \frac{1}{t - \lambda} f(t)$

Also $\operatorname{Sp} T = [1,2]$.

7.7 Lemma: Sei A eine Banachalgebra mit 1.

(a) $x \in A$, $\|1-x\| < 1$ $\Rightarrow$ x invertierbar, $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$

(b) $x \in A$ invertierbar, $y \in A$, $\|x-y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ $\Rightarrow$ y invertierbar,

(c) $GL(A) := \{x \in A \mid x \text{ invertierbar}\}$ offen, $\begin{array}{l} GL(A) \to GL(A) \\ x \mapsto x^{-1} \end{array}$ stetig

Beweis: (a) Für $z := 1-x$ ist $\|z\| < 1$ und daher $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergent ($\sum \|z^n\| \le \sum \|z\|^n < \infty$), also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (1.30).

Und $(1-z)\sum_{n=0}^{k} z^n = \sum_{n=0}^{k} z^n - \sum_{n=1}^{k+1} z^n = 1 - z^{k+1} \to 1$ für $k \to \infty$ ($\|z^k\| \le \|z\|^k$)

$x \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

(b) $y = ((yx^{-1} - 1) + 1)x$, $\|1 - yx^{-1}\| = \|(x-y)x^{-1}\| \le \|x-y\| \|x^{-1}\| < 1$

$\overset{(a)}{\Rightarrow}$ yx^{-1} invertierbar, also auch y invertierbar mit $y^{-1} = x^{-1}((yx^{-1}-1)+1)^{-1}$

(c) Für $\|x-y\| < \varepsilon < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ ist $B(x,\varepsilon) \subseteq GL(A)$, $x \in GL(A)$ nach (b).

Sei nun $x_\lambda \to x$, $x_\lambda, x \in GL(A)$. Dann ist $\|x - x_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2\|x^{-1}\|}$ für λ groß und $0 < \varepsilon < 1$. Also $\|1 - x_\lambda x^{-1}\| = \|(x - x_\lambda)x^{-1}\| < \frac{\varepsilon}{2} < 1$

$\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $x x_\lambda^{-1} = (x_\lambda x^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x_\lambda x^{-1})^n$

Also $\|x_\lambda^{-1} - x^{-1}\| = \|x^{-1}(x x_\lambda^{-1} - 1)\| \le \|x^{-1}\| \|\sum_{n=1}^{\infty} (1-x_\lambda x^{-1})^n\| \le \|x^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\|1-x_\lambda x^{-1}\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}{}^n < \frac{\varepsilon \|x^{-1}\|}{2}$

$\square$

7.8 Proposition: In einer Banachalgebra A mit 1 gilt: $\operatorname{Sp} x$ kompakt $\forall x \in A$.

Beweis: $\mathfrak{S}(x) = f_x^{-1}(GL(A))$ offen unter $f_x: \begin{array}{l} \mathbb{C} \to A \\ \lambda \mapsto \lambda - x \end{array}$ stetig $\Rightarrow$ $\operatorname{Sp} x$ abgeschlossen.

Und $|\lambda| > \|x\|$ $\Rightarrow$ $\lambda - x = \lambda(1 - \frac{x}{\lambda})$ invertierbar nach 7.7(a). ($\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$)

Somit $\operatorname{Sp} x \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|x\|\}$ also beschränkt.

$\square$

7.9 Satz: In einer Banachalgebra A mit 1 gilt: $Sp\, x \neq \emptyset \quad \forall x \in A$.

Beweis: Für $\lambda \in \rho(x)$ setze $R_\lambda(x) := (\lambda - x)^{-1}$.

1.) $R_\lambda(x) - R_\mu(x) = (\mu - \lambda) R_\lambda(x) R_\mu(x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Bew (1.): $R_\lambda(x) - R_\mu(x) = R_\lambda(x) \underbrace{R_\mu(x)(\mu - x)}_{=1} - \underbrace{(\lambda - x) R_\lambda(x)}_{=1} R_\mu(x) \overset{\uparrow}{=} (\mu - \lambda) R_\lambda(x) R_\mu(x)$

(Beachte: $x(\lambda - x) = (\lambda - x)x \Rightarrow R_\lambda(x) x = x R_\lambda(x)$) $\square$(1.)

2.) Ist x invertierbar und $f \in A'$ mit $f(x^{-1}) \neq 0$, so ist

$$g : \rho(x) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(\lambda) := f(R_\lambda(x)) \text{ holomorph}, \quad g(0) \neq 0$$

Bew (2.): $\dfrac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} = f\left(\dfrac{R_\lambda(x) - R_\mu(x)}{\lambda - \mu}\right) \overset{1.)}{=} -f(R_\lambda(x) R_\mu(x)) \longrightarrow -f(R_\lambda^2(x))$

für $\mu \to \lambda$, da $R_\cdot$ stetig (7.7(c)). $g(0) = -f(x^{-1}) \neq 0$. $\square$(2.)

3.) Ann: $Sp\, x = \emptyset$. Dann ist $0 \notin Sp\, x$, d.h. $(0 - x)$ ist invertierbar und somit auch x. Nach Hahn-Banach (2.6) ex. $f \in A'$ mit $f(x^{-1}) \neq 0$.
Dann ist g ganz und beschränkt, denn $g(\lambda) \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$:
Mit $z := 1 - \lambda^{-1} x$ ist $\|1 - z\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$ für $|\lambda|$ groß.

$\overset{7.7(a)}{\Longrightarrow}$ z invertierbar mit $z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^n$, also $\|z^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|1 - z\|^n = \dfrac{1}{1 - \|1 - z\|}$

$\Rightarrow \|(1 - \lambda^{-1} x)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}}$

und $\|R_\lambda(x)\| = \|(\lambda - x)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \|(1 - \lambda^{-1} x)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|\lambda|} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \dfrac{1}{|\lambda| - \|x\|} \longrightarrow 0$ für $|\lambda| \to \infty$

Nach Liouville ist also g konstant $\Rightarrow g \equiv 0$ ↯ $(g(0) \neq 0)$. $\square$