§8 Kompakte Operatoren und der Spektralsatz

8.1 Bemerkung: Sei E ein normierter Vektorraum. Dann sind äquivalent:
(a) E ist endlichdimensional.
(b) $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.

Ist nun H ein Hilbertraum mit $\dim H = \infty$, so sind abgeschlossene Kugeln in H nicht kompakt und auch $A(\{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}) \subseteq H$ für beliebiges $A \in \mathcal{L}(H)$ wird i.A. nicht kompakt sein.
Das macht die Spektraltheorie von $A \in \mathcal{L}(H)$ wesentlich komplizierter.
Wir betrachten daher zuerst Operatoren, die „näher am Endlichdimensionalen" sind.

8.2 Definition: Seien X, Y Banachräume. Dann heißt ein linearer Operator $T: X \to Y$ kompakt, falls $\overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$ kompakt ist.
Wir schreiben $\mathcal{K}(X,Y) := \{T: X \to Y \text{ linear} \mid T \text{ kompakt}\}$.

Wir werden uns hauptsächlich für $X = Y = H$ Hilbertraum interessieren, aber viele Aussagen allgemein für Banachräume formulieren.

8.3 Bemerkung: (a) Jeder kompakte Operator ist stetig, denn da $\overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$ kompakt ist, ist die Menge auch beschränkt, also ex. $C \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq C \quad \forall \|x\| \leq 1$.

(c) T ist kompakt genau dann, wenn $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ beschränkt ist.
Sei nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und o.E. $\|x_n\| \leq 1$ $\forall n$ (sonst reskalieren). Dann ist $\overline{\{Tx_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ kompakt als abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$ und enthält somit eine konvergente Teilfolge.
Ist umgekehrt (Tx_n) eine Folge in $\overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$, so besitzt sie eine konv. Teilfolge nach Voraussetzung. Somit ist $\overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$ kompakt.

8.3 (~~51~~)(5): T ist kompakt genau dann, wenn $\overline{TM}$ kompakt ist für alle beschränkten Mengen $M \subseteq X$.

Da $\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq X$ beschränkt ist, ist die eine Richtung klar.

Sei umgekehrt T kompakt und $M \subseteq X$ beschränkt. Dann ist $\frac{1}{c} M \subseteq \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ und $\overline{TM} \subseteq c \cdot \overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$ kompakt.

~~(c) Ist $T: X \to Y$ linear und beschränkt und TX endlichdimensional (wir sagen dann „T hat endlichen Rang") so ist T kompakt, denn~~

~~$\overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}} \subseteq \{y \in TX \mid \|y\| \leq C\}$ kompakt nach 8.1.~~

8.7 (b) $Id: X \to X$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ X endlichdimensional

Hierbei gilt „$\Leftarrow$" nach (c) und „$\Rightarrow$" nach 8.1.

8.4 Definition: Ein (zweiseitiges) Ideal in einer Algebra A ist ein linearer Teilraum $I \subseteq A$ mit $A \cdot I, I \cdot A \subseteq I$.
Ist A eine Banachalgebra und I ein abgeschlossenes Ideal, so schreibe $I \lhd A$.

8.5 Satz: Sei X ein Banachraum. Dann $\mathcal{K}(X) \lhd \mathcal{L}(X)$.

Beweis: 1.) Sind $S, T \in \mathcal{K}(X)$ und M beschränkt, so ist $\overline{(S+T)M} \subseteq \overline{SM} + \overline{TM}$ kompakt, da die Addition stetig ist.
$\Rightarrow$ $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$ linearer Teilraum.

2.) Sei $S \in \mathcal{K}(X)$, $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist TM beschränkt für $M \subseteq X$ beschr.
$\Rightarrow$ $\overline{S(TM)}$ kompakt, d.h. $ST \in \mathcal{K}(X)$.
Andererseits ist $TS(M) \subseteq T(\overline{SM})$ $\Rightarrow$ $\overline{TS(M)} \subseteq \overline{T(\overline{SM})}$.
Doch $\overline{SM}$ ist kompakt, also ist $T(\overline{SM})$ kompakt (T stetig) $\Rightarrow$ $\overline{T\overline{SM}} = T\overline{SM}$,
also ist $\overline{TS(M)}$ kompakt, d.h. $TS \in \mathcal{K}(X)$. Also $\mathcal{K}(X)$ Ideal.

3.) bzz.: $\mathcal{K}(X)$ ist abgeschlossen. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}(X)$ mit $T_n \to T \in \mathcal{L}(X)$.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ beschränkte Folge. bzz.: $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt konvergente Teilfolge.

Da T_1 kompakt ist, ex. eine Teilfolge $(x_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(T_1 x_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Induktiv ex. eine Teilfolge $(x_k^{(n+1)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(T_{n+1} x_k^{(n+1)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Beachte: Da $(x_k^{(n+1)})_{k\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Teilfolge von $(x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$ für $m < n+1$ ist, konvergiert auch $(T_m x_k^{(n+1)})_{k\in\mathbb{N}}$. Setze nun $y_k := x_k^{(k)}$ Diagonalfolge.

Dann ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bis auf endlich viele Glieder Teilfolge von $(x_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$ $\forall m\in\mathbb{N}$. Also konvergiert $(T_m y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\forall m$.

Zeige nun: $(Ty_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine konvergente Teilfolge von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $\varepsilon>0$ und $n\in\mathbb{N}$ so groß, dass $\|T-T_n\|<\varepsilon$.

Sei $M:=\sup_{k\in\mathbb{N}}\|y_k\|<\infty$ (ex., da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt).

Sei $N\in\mathbb{N}$, so dass $\|T_n y_k - T_n y_\ell\|<\varepsilon$ (ex., da $(T_n y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konv.) $\forall k,\ell\geq N$.

Dann gilt für $k,\ell\geq N$:

$$\|Ty_k - Ty_\ell\| \leq \underbrace{\|Ty_k - T_n y_k\|}_{\substack{\leq \|T-T_n\| M \\ < \varepsilon M}} + \underbrace{\|T_n y_k - T_n y_\ell\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|T_n y_\ell - T y_\ell\|}_{\leq \varepsilon M}$$

Also ist $(Ty_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge und konvergiert somit. $\square$

8.6 <u>Definition</u>: Ein Operator $T: X\to X$ heißt von <u>endlichem Rang</u>, falls TX endlichdimensional ist.

8.7 <u>Bemerkung</u>: (a) Ist T linear, beschränkt und von endlichem Rang, so ist T <u>kompakt</u>, denn

$\overline{\{Tx \mid \|x\|\leq 1\}} \subseteq \{y\in TX \mid \|y\|\leq C\}$ kompakt nach 8.1.

(b) (s. Seite 8-2)

(c) Man kann wie in 8.5 zeigen, dass die Menge
$E(X) := \{T : X \to X$ linear, beschränkt, von endlichem Rang$\}$
ein (i. A. nicht abgeschlossenes) beidseitiges Ideal in $\mathcal{L}(X)$ ist.
Außerdem gilt $\overline{E(X)} \subseteq K(X)$.

12.12.

8.8 **Satz:** Sei H ein separabler Hilbertraum. Dann gilt $\overline{E(H)} = K(H)$.
(In Banachräumen i. A. falsch, siehe Enflo 1973)

Beweis: Sei $T \in K(H)$. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB von H. (o.E. $\dim H = \infty$)
Betrachte $H_n := \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n) = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{C}\}$
und sei P_n die orthogonale Projektion hierauf (s. Blatt 8,
also $P_n(x+y) = x$ für $x+y \in H_n \oplus H_n^\perp = H$).
Setze $T_n := P_n T \in E(H)$. Bez.: $\|T - T_n\| \to 0$.

Sei $x \in H$. Dann ist
$$T_n x = P_n T x = \sum_{k=1}^n \langle Tx, e_k\rangle e_k \longrightarrow \sum_{k=1}^\infty \langle Tx, e_k\rangle e_k \overset{\text{Parseval S.25}}{=} Tx$$
Das beweist aber nur $\|Tx - T_n x\| \to 0$, nicht $\|T - T_n\| \to 0$!

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da T kompakt ist, ist $\{Tx \mid \|x\| \le 1\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m B(Tx_j, \varepsilon)$
für endlich viele $x_1, \dots x_m$ mit $\|x_j\| \le 1$.
Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|Tx_j - T_n x_j\| < \varepsilon$ für $n \ge N$ und alle $j = 1, \dots m$.
Dann gilt für beliebiges $\underset{\|x\|\le 1}{x \in H}$: $\exists x_j$ mit $\|Tx - Tx_j\| < \varepsilon$.
Also:
$$\|Tx - T_n x\| \le \underbrace{\|Tx - Tx_j\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|Tx_j - T_n x_j\|}_{<\varepsilon} + \|T_n x_j - T_n x\|$$
$$= \|P_n(Tx_j - Tx)\| \underset{\text{Blatt 8}}{\le} \|Tx_j - Tx\| < \varepsilon$$
$\forall n \ge N$
$\forall \|x\| \le 1$

$\Rightarrow \|T - T_n\| < \varepsilon$ für $n \ge N$

$\square$

8.9 Satz von Schauder: (a) Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$, so ist $T \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(H)$.

(b) Sind X, Y Banachräume und ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompakt, so ist auch $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ kompakt.

Beweis: (a) „$\Rightarrow$" Sei $T \in \mathcal{K}(H)$. Nach 8.8 ex. $(T_n) \subseteq E(H)$ mit $T_n \to T$.

Dann $\|T_n^* - T^*\| \overset{6.6}{=} \|T_n - T\| \to 0$, d.h. $T_n^* \to T^*$.

Und $T_n^* \in E(H)$, da $T_n^* = T_n^* P_n^* = T_n^* P_n \in E(H)$. $\Rightarrow T^* \in \mathcal{K}(H)$

„$\Leftarrow$" $T^{**} = T$. Also „$\Rightarrow$" mit T^*.

(b) Benutze Arzela-Ascoli, was kompakte Teilmengen von $C(X)$ beschreibt (für X kompakt). Wir lassen den Beweis hier weg. $\square$

8.10 Bemerkung: Aus 8.9(b) folgt 8.9(a), denn $T^* = J^{-1} \circ T' \circ J$ ist kompakt, falls T' kompakt ist.

8.11 Beispiel: (a) Ist $\dim H < \infty$, so ist $\mathcal{K}(H) = \mathcal{L}(H)$ nach 8.8.
Insbesondere $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$.

(b) Ist $H = L^2[0,1]$, $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$ und $K \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ wie in 6.2, so ist $K \in \mathcal{K}(L^2[0,1])$. Benutze dazu, dass eine ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $L^2[0,1]$ eine ONB $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ von $L^2([0,1]\times[0,1])$ ergibt, durch $e_{n,m}(s,t) := e_n(s)\cdot\overline{e_m(t)}$.

Setze $k_N := \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{n,m} e_{n,m}$ für $k = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{n,m} e_{n,m}$.

Also $\|k - k_N\|_2 \to 0$. Für K_N Integraloperator mit Kern k_N ist dann $K - K_N$ Integraloperator mit Kern $k - k_N$.

Also $\|K - K_N\| \overset{6.2}{\leq} \|k - k_N\| \to 0$, d.h. $K_N \to K$.

K_N hat endlichen Rang:
$$(K_N f)(s) = \int k_N(s,t) f(t)\,dt = \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{n,m} \int e_n(s)\overline{e_m(t)} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} e_n(s) \left(\sum_{m=1}^{N} \alpha_{n,m} \langle f, e_m\rangle\right)$$

$\Rightarrow K_N f \in \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_N) \quad \forall f$

8.12 <u>Spektralsatz</u> für selbstadjungierte kompakte Operatoren:

Sei: H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H)$ mit $T = T^*$. Dann gilt:

(a) Ist $\lambda \in \sigma_p(T)$ (ein Eigenwert von T), $\lambda \neq 0$, so ist der Eigenraum $\ker(\lambda - T)$ endlichdimensional.

(b) Ist $\lambda \notin \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, so ist $\lambda \notin Sp(T)$ und $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(c) Der Operator T hat nur abzählbar viele verschiedene Eigenwerte $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ und die zugehörigen Eigenräume für $\lambda_i \neq 0$ stehen orthogonal aufeinander und sind endlichdimensional.
Alle Eigenwerte sind reell und $Sp\,T \subseteq \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.
Es gilt: $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$, d.h. T ist diagonalisierbar.

<u>Beweis:</u> (a) Sei $(e_i)_{i \in I}$ ONS in $\ker(\lambda - T)$. Dann gilt für $i \neq j$:
$\|Te_i - Te_j\|^2 = \|\lambda e_i - \lambda e_j\|^2 = 2|\lambda|^2$ nach Pythagoras. Wäre also $I = \mathbb{N}$ unendlich, so hätte $(Te_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge (↯).

(b) zz: $\text{Bild}(\lambda - T) = H$ (dann: $\lambda - T$ surjektiv, injektiv da $\lambda \notin \sigma_p(T)$ $= \{\lambda \mid \lambda - T$ nicht inj.$\}$).

(1.) $\exists\, c > 0 : \quad \|Tx - \lambda x\| \geq c\,\|x\| \quad \forall x \in H$

⌜<u>Beweis von (1.)</u>: <u>Lemma</u>: $T = T^* \in \mathcal{K}(H), \lambda \neq 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$, $\|x_n\| = 1$, $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$

Beweis(Lemma): Da T kompakt ist, ex. eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $Tx_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y \in H$.
Also $\lambda x_{n_k} = Tx_{n_k} - \underbrace{(Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k})}_{\to 0} \to y \Rightarrow x_{n_k} \to \frac{1}{\lambda} y$
Somit $\lambda y \leftarrow \lambda(Tx_{n_k}) = T(\lambda x_{n_k}) \to Ty$, d.h. y Eigenwert.
⌞ Und $y \neq 0$: $1 \equiv \|x_{n_k}\| \to \|\frac{1}{\lambda} y\| \Rightarrow \|y\| = |\lambda| \neq 0$. Also $\lambda \in \sigma_p(T)$. □(1.)

(2.) $\text{Bild}(\lambda - T) = \overline{\text{Bild}(\lambda - T)}$

⌜<u>Beweis von (2.)</u>: Sei $y \in \overline{\text{Bild}(\lambda - T)}$, d.h. $\exists x_n \in H$ mit $\lambda x_n - Tx_n \to y$.
Dann $\|x_n - x_m\| \overset{(1.)}{\leq} \frac{1}{c} \|T(x_n - x_m) - \lambda(x_n - x_m)\| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$
$\Rightarrow (x_n)$ ist Cauchy, d.h. $x_n \to x \in H$ und $y \leftarrow \lambda x_n - Tx_n \to \lambda x - Tx$
⌞ d.h. $y \in \text{Bild}(\lambda - T)$. □(2.)

(3.) $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$, da zu $\lambda \in \sigma_p(T)$, $x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$ gilt: $\bar{\lambda}\langle x,x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle$
$= \langle x, Tx\rangle$
$= \langle Tx, x\rangle$
$= \lambda\langle x,x\rangle$
$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

Also $\overline{\text{Bild}(\lambda - T)} \overset{(2.)}{=} \overline{\text{Bild}(\lambda - T)} = \underbrace{\ker((\lambda - T)^*)}_{=\{0\} \text{ da } \bar{\lambda} \notin \sigma_p(T)}{}^{\perp} = H$.

(c) (1.) $\exists \lambda_1 \in \sigma_p(T)$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| = \|T\|$ 17.12.

Bew. von (1.): Nach Blatt 8, A4 ist $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \mid \|x\| = 1\}$, also ex. $(x_n) \subseteq H$, $\|x_n\| = 1$ mit $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \to \|T\|$.

$\langle Tx_n, x_n\rangle \in \mathbb{R}$ (6.9), also o.E. $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda_1 := \pm\|T\|$ (evtl. nur Teilfolge)

Dann $\|(T - \lambda_1)x_n\|^2 = \underbrace{\|Tx_n\|^2}_{\leq \lambda_1^2} - 2\lambda_1\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda_1^2 \leq 2\lambda_1(\underbrace{\lambda_1 - \langle Tx_n, x_n\rangle}_{\to 0})$

Wie in (b)(1.) ist also $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$.

□(1.)

(2.) Setze $H_1 := \ker(\lambda_1 - T)$, $P_1 :=$ Proj. auf H_1. $H = H_1 \oplus H_1^\perp$

Dann ist $TH_1 \subseteq H_1$, $TH_1^\perp \subseteq H_1^\perp$.

($x \in H_1 \Rightarrow Tx = \lambda_1 x \in H_1$, da H_1 TR. Und für $x \in H_1^\perp$, $y \in H_1$ ist $\langle Tx, y\rangle = \lambda_1\langle x, y\rangle = 0$)

Also $T = \lambda_1 1 \oplus T_2$, $T_2 := T_{|H_1^\perp} \in \mathcal{K}(H_1^\perp)$, $T_2 = T_2^*$.

Wie in (1.) ex. $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ mit $H_2 := \ker(\lambda_2 - T_2) = \ker(\lambda_2 - T)$

(3.) Induktiv ex. $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, $H_n := \ker(\lambda_n - T)$ paarweise orthogonal ($x \in \ker(\lambda_n - T)$, $y \in \ker(\lambda_m - T)$. $\lambda_n\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, y\rangle\lambda_m$ $\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$)

(4.) $\lambda_n \to 0$

Bew. von (4.): Da $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ ex. $\alpha \geq 0$ mit $|\lambda_n| \to \alpha$.

Für $x_n \in H_n$, $\|x_n\| = 1$ ex. konv. TF von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aber
$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0$. □(4.)

(5.) $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n \to T$ für $P_n :=$ Proj. auf H_n.

Bew. von (5.): $x \in H$. $\|(T - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n)x\| = \|Tx_1\| \leq \underbrace{\|T_{|H'}\|}_{\leq |\lambda_{n+1}| \to 0}\underbrace{\|x_1\|}_{\leq \|x\|}$

$\left(x = x_0 + x_1 \in (H_1 \oplus \ldots \oplus H_N) \oplus \underbrace{(H_1 \oplus \ldots \oplus H_N)^\perp}_{=: H'}\right)$

□(5.)

□

8.13 Spektralsatz für kompakte Operatoren auf Banachräumen:

Sei X ein Banachraum, $T \in K(X)$. Dann:

(a) $Sp\, T$ hat höchstens abzählbar viele Elemente und der einzig mögliche Häufungspunkt ist 0. Ist X unendlichdimensional, so ist $0 \in Sp\, T$.

(b) $\lambda \in Sp\, T, \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$ und $\dim \ker(\lambda - T) < \infty$

(c) Zu $\lambda \in Sp\, T, \lambda \neq 0$ gibt es eine Zerlegung $X = N_\lambda \oplus F_\lambda$ (im Sinne von 5.16(b)) mit $\ker(\lambda - T) \subseteq N_\lambda$, $(\lambda - T)_{|N_\lambda}$ nilpotent und $\mu \in Sp\, T, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu \Rightarrow N_\lambda \subseteq F_\mu$.

Beweisideen: Betrachte o.E. nur $1 - T$, denn $\lambda - T = \lambda(1 - \frac{T}{\lambda})$ für $\lambda \neq 0$ und $T \in K(X) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} T \in K(X)$. Idee: $A := 1 - T$ ist eine kompakte (= kleine) Störung von 1, also sind die Eigenschaften noch bei 1.

- $\ker(1 - T)$ ist endlichdimensional (s. 8.12(a))

Klar, denn $\ker A \subseteq X$ ist ein abgeschlossener Teilraum und $\{x \in \ker A \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$ kompakt $\overset{8.1}{\Longrightarrow} \ker A$ endl.-dim.

($\subseteq$: $x \in \ker A \Rightarrow Tx = x$)

- $\text{Bild}(1 - T) \subseteq X$ abgeschlossen (s. 8.12(b))

schwierig!

- Für $\ker A \subseteq \ker A^2 \subseteq \ker A^3 \subseteq \ldots$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\ker A^{n_0} = \ker A^{n_0+1}$ (die Folge bricht ab) $N_\lambda := \ker(\lambda - T)^{n_0}$
Ebenso $F_\lambda := \text{Bild}(\lambda - T)^{n_0}$ $(\text{Bild}\, A \supseteq \text{Bild}\, A^2 \supseteq \text{Bild}\, A^3 \supseteq \ldots)$.
Kann dann zeigen: $X = N_\lambda \oplus F_\lambda$.

(b) Zu $\lambda \in Sp\, T, \lambda \neq 0$ ist $N_\lambda = \ker(\lambda - T)^{n_0} \neq 0$, d.h. $(\lambda - T)\underbrace{(\lambda - T)^{n_0 - 1} x}_{=: y} \neq 0$ oder sonst Iteration $\Rightarrow \ker(\lambda - T) \neq 0$, also $\lambda \in \sigma_p(T)$.

(a) Z: Zu $\lambda \in Sp\, T, \lambda \neq 0$ ex. $\varepsilon > 0$ mit $B(\lambda, \varepsilon) \cap Sp\, T = \{\lambda\}$.
Dann $Sp\, T$ abzählbar, denn außerhalb von $B(0, \frac{1}{n})$ ex. wegen der Kompaktheit von $Sp\, T$ nur endlich viele Spektralwerte, für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$