§ 9 Banach- und C^*-Algebren und die Gelfandtransformation

9.1 Definition: (a) Eine normierte Algebra ist eine Algebra A, die ein normierter Vektorraum ist und $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \ \forall x,y \in A$ erfüllt.

(b) Eine Banachalgebra ist eine vollständige, normierte Algebra. (s. auch 7.1)

(c) Eine Involution auf einer Algebra A (über $\mathbb{C}$) ist eine Abbildung $^*: A \to A$ mit:

(i) $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ (* ist antilinear)
(ii) $(ab)^* = b^* a^*$
(iii) $a^{**} = a$

(d) Eine C^*-Algebra ist eine Banachalgebra A mit Involution, sodass $\|x^* x\| = \|x\|^2 \ \forall x \in A$ gilt.

(e) Eine Algebra / Banachalgebra / C^*-Algebra heißt kommutativ, falls $xy = yx \ \forall x,y$ gilt.

(f) Sind A, B Banachalgebren, so heißt eine Abbildung $\varphi: A \to B$ ein (Algebren-)Homomorphismus, falls φ linear und multiplikativ ($\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \ \forall a,b$) ist.
Besitzen A und B eine Involution und gilt $\varphi(a^*) = \varphi(a)^* \ \forall a \in A$, so heißt φ ein *-Homomorphismus.
Gilt $\|\varphi(a)\| = \|a\|$, so heißt φ isometrisch.

(g) Eine Banachalgebra / C^*-Algebra heißt unital (oder mit Eins), falls sie als Algebra eine Eins besitzt.

9.2 Beispiel: (a) H Hilbertraum, dann $\mathcal{L}(H)$ unitale C^*-Algebra mit der Involution $A \mapsto A^*$ (s. 6.6).
Ist H endlichdimensional, so ist $M_n(\mathbb{C})$ C^*-Algebra, $(a_{ij})^* := (\overline{a_{ji}})$.

(b) Ist X kompakter, topologischer Raum, so ist $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ eine C^*-Algebra mit $f^*(x) := \overline{f(x)}$. $\mathcal{C}(X)$ ist unital und kommutativ. Werden sehen: A unitale, kommutative C^*-Algebra $\Rightarrow \exists X$ kompakt: $A \cong \mathcal{C}(X)$.

Wir sehen also, dass $\mathcal{L}(H)$ die Struktur einer C^*-Algebra trägt, genauso wie $\mathcal{C}(X)$ für X kompakt. Das zeigt erstens, dass C^*-Algebren eine Art „nichtkommutative Version" von $\mathcal{C}(X)$ sind, und zweitens, dass sie Einiges über Operatoren auf Hilberträumen erklären könnten.
Tatsächlich veränderte sich das „Antlitz der modernen Analysis" durch die Einführung von C^*-Algebren durch Gelfand und Neumark 1943 (schreibt Kadison 1993). Sie legten den Grundstein für eine „nichtkommutative Analysis". Die Theorie der Operatoralgebren (zu denen C^*-Algebren zählen) sind wichtig für einen präzisen quantenmechanischen Formalismus, für Gruppendarstellungen, abstrakte Ringtheorie, sie haben Verbindungen zu harmonischer Analysis, Differentialgeometrie, Indextheorie... Sie sind das Studium von Operatoren auf Hilberträumen mit algebraischen Methoden.

9.3 Bemerkung: (a) Eine Involution ist bijektiv mit $({}^*)^{-1} = {}^*$

(b) Ist A unitale Banachalgebra, so ist $1^* = 1$.

$\left(1^* x = (x^* 1)^* = x^{**} = x \Rightarrow 1^* \text{ ist eine Eins } \Rightarrow 1^* = 1^* 1 = 1 \right)$

Ist A unitale C^*-Algebra, so ist außerdem $\|1\| = 1$.

$\left(\|1\|^2 = \|1^* 1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\| \Rightarrow \|1\| \in \{0,1\},\ \|1\| = 0 \Rightarrow a = 0\ \forall a \in A \right)$

(c) $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$. $\left((x^{-1})^* x^* = (x x^{-1})^* = 1 \right)$

(d) $Sp\, x^* = \overline{Sp\, x}$ $\left(\lambda - x \text{ invertierbar } \overset{(c)}{\Leftrightarrow} \underbrace{(\lambda - x)^*}_{= \bar{\lambda} - x^*} \text{ invertierbar} \right)$

(e) $\|x^*\| = \|x\|$ $\forall x \in A$, falls A eine C^*-Algebra ist.

$\left(\|x\|^2 = \|x^* x\| \le \|x^*\| \, \|x\| \Rightarrow \|x\| \le \|x^*\| \le \|x^{**}\| = \|x\| \right)$

9.4 Definition: Sei A eine Banachalgebra mit Eins, $x \in A$.

$r(x) := \sup\{ |\lambda| \mid \lambda \in Sp\, x \}$ „Spektralradius" von x.

9.5 Bemerkung: Es gilt $r(x) \le \|x\|$, da $Sp\, x \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|x\| \}$ (7.8).

9.6 Beispiel: Im Allgemeinen gilt $r(x) < \|x\|$, z.B.

$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Dann $\lambda - x = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ invertierbar $\forall \lambda \neq 0$,

also $\operatorname{Sp} x = \{0\}$, d.h. $r(x) = 0$ und $\|x\| \neq 0$.

Wann also gilt $r(x) = \|x\|$?

9.7 Satz: Sei A Banachalgebra mit Eins, $x \in A$.

Dann $r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

(Erstaunlich: $r(x)$ ist eine rein algebraische Größe, $\lim \sqrt[n]{\|x^n\|}$ hingegen eine, die von der Norm (also der Topologie) abhängt)

Beweis: $\lambda \in \operatorname{Sp} x \Rightarrow \lambda^n \in \operatorname{Sp} x^n$, denn $\lambda^n - x^n = (\lambda - x)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} x + \dots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1})$

Also $|\lambda^n| \leq \|x^n\| \Rightarrow |\lambda| \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$, d.h. $r(x) \leq \liminf \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

bzw. $r(x) \geq \limsup \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Betrachte $R(z) := (z - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^{n+1}}$ für $\|x\| < |z|$ (nach 7.7(a))

$\left[x' := 1 - \frac{x}{z}.\ \|1 - x'\| < 1 \overset{7.7}{\Longrightarrow} x'^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x')^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{z^n},\ \underbrace{z - x}_{= z x'} \right]$

Wäre dies komplexwertig, so wäre der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gegeben durch $\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Sei nun $\varphi \in A'$. Wie in 7.9 ist $f : \varsigma(x) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \varphi(R(z))$ holomorph

und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^n)}{z^{n+1}}$ für $|z| > \|x\|$, sogar für $|z| > r(x)$.

Also $\limsup |\varphi(x^n)|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$ $\left(\text{Konv.rad.} = \frac{1}{\limsup |\varphi(x^n)|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{r(x)} > \left|\frac{1}{z}\right|\right)$

Für $r > r(x)$ ex. $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\varphi(x^n)|^{\frac{1}{n}} < r$, $n \geq N$.

Somit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\varphi(x^n)}{r^n} \right| < \infty$. Dies gilt für alle $\varphi \in A'$.

Nach 4.5 (Prinzip glm. Beschr.) also $\{ \frac{x^n}{r^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ beschränkt,

d.h. es ex. $C > 0$ mit $\|x^n\| \leq C r^n$, d.h. $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}} r$

$\Rightarrow \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r \quad \forall r > r(x) \Rightarrow \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x)$.

$\square$

9.8 Korollar: Ist A eine unitale C^*-Algebra und $x \in A$ normal (d.h. $x^*x = xx^*$), so gilt $r(x) = \|x\|$.

Beweis: $\|a^2\|^2 = \|(a^2)^*(a^2)\| = \|a^*a a^* a\| = \|(a^*a)^*(a^*a)\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4$

$\Rightarrow \|a^2\| = \|a\|^2 \overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$.

Also $r(a) = \lim \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|$. $\square$

Normale Elemente verhalten sich „lokal wie kommutative Elemente", denn wenn x mit x^* vertauscht, so auch [illegible] nichtkommutative Polynome (Monome: $x^{k_1}x^{*k_2}x^{k_3}x^{*k_4}$) in x und x^*.
Die Algebra der Polynome in x und x^* ist also kommutativ, wenn x normal ist. Wir betrachten nun kommutative Banachalgebren mit 1.

9.9 Satz (Gelfand-Mazur): Sei A eine unitale (nicht notw. kommutative) Banachalgebra, die gleichzeitig ein Körper ist (d.h. jedes Element $\neq 0$ ist invertierbar).
Dann ist $A \cong \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $x \in A$. Dann ist $Sp\, x \neq \emptyset$ (7.9), also ist für $\lambda \in Sp\, x$
7.1.2014 $\lambda - x$ nicht invertierbar, d.h. $\lambda - x = 0 \Rightarrow x = \lambda \cdot 1 \Rightarrow A = \mathbb{C}\cdot 1$ $\square$

9.10 Definition: Ein (zweiseitiges) Ideal I in einer Algebra A (siehe 8.4) heißt maximal, falls ($I \subseteq J \subseteq A \Rightarrow J = I$ oder $J = A$) $\forall J \subseteq A$ (zw.s.) Ideal) und $I \neq A$.

9.11 Proposition: Sei A eine Banachalgebra.

(a) Ist $I \trianglelefteq A$ ein abgeschlossenes Ideal, so ist A/I eine Banachalgebra.

(b) Ist $I \subseteq A$ ein (zweiseitiges) Ideal, so ist auch $\overline{I} \subseteq A$ ein (zweis.) Ideal.

(c) Ist A unital, so ist jedes maximale Ideal abgeschlossen.

(d) Ist A unital, so ist jedes (nichttriviale) Ideal in einem maximalen enthalten.
(d.h. $I \neq A$)

Beweis: (a) A/I Banachraum nach 1.32; Algebra, da $\dot{x}\dot{y} := (xy)^\cdot$ wohldefinierte Multiplikation ist ($a,b \in I$, dann $((x+a)(y+b))^\cdot = (xy + \underbrace{ay + xb + ab}_{\in I})^\cdot = (xy)^\cdot$).

Außerdem $\|\dot{x}\dot{y}\| \leq \|\dot{x}\|\|\dot{y}\|$, denn zu $\varepsilon > 0$ ex. $a,b \in I$ mit $\|x+a\| \leq \|\dot{x}\| + \varepsilon$, ebenso für $\|\dot{y}\|$.

Also $\|\dot{x}\dot{y}\| = \|(x+a)^\cdot(y+b)^\cdot\| \overset{1.32(c)}{\leq} \|x+a\|\|y+b\| \leq (\|\dot{x}\|+\varepsilon)(\|\dot{y}\|+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$

(b) $x \in \overline{I}$, also ex. $(x_n) \subseteq I$, $x_n \to x$. Dann $\underbrace{ax_n}_{\in I} \to ax$ für $a \in A$ $\Rightarrow ax \in \overline{I}$.

(c) Sei $I \subseteq A$ maximal. Dann ist $I \subseteq \overline{I} \subseteq A$. bzw. $\overline{I} \neq A$.

Da $GL(A) = \{z \in A \mid z \text{ invertierbar}\}$ offen ist (7.7) und $I \cap GL(A) = \emptyset$ ist (wäre $z \in I$ invertierbar, so wäre $1 = z \cdot z^{-1} \in I$ $\Rightarrow x = x \cdot 1 \in I \;\forall x \in A$),

ist auch $\overline{I} \cap GL(A) = \emptyset$ ($\overline{I} \subseteq GL(A)^c$, $GL(A)^c$ abgeschlossen).

(d) Nach Zorn ex. ein maximales Element für die Ordnung „$I_1 \subseteq I_2$" auf der Menge der Ideale, die I enthalten.

(Sind $I \subseteq J_\alpha$ Ideale, $\alpha \in K$, K Indexmenge, J_α echt (also $1 \notin J_\alpha$), so ist auch $\bigcup_{\alpha \in K} J_\alpha \subseteq A$ ein Ideal mit $I \subseteq \bigcup J_\alpha$ und $1 \notin \bigcup J_\alpha$)

$\square$

9.12 Def/Prop: Sei A eine unitale Banachalgebra. Ein Homomorphismus $\varphi: A \to \mathbb{C}$, $\varphi \neq 0$ (s. 9.1(f)) heißt Charakter.

$\operatorname{Spec} A := \{\varphi: A \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ Charakter}\}$ heißt Spektrum von A.

9.13 Lemma: Sei A eine unitale Banachalgebra und $\varphi \in \operatorname{Spec} A$.

(a) Es gilt $\varphi(1) = 1$.

(b) φ ist stetig und $\|\varphi\| \leq 1$ (mit $\|\varphi\| = 1$, falls $\|1\| = 1$)

(c) $\forall a \in A$: $\varphi(a) \in \operatorname{Sp} a$ und $\varphi(x) \neq 0 \;\forall x \in A$ invertierbar

(d) Ist A eine C^*-Algebra, so ist φ ein $*$-Homomorphismus.

<u>Beweis:</u> (a) Da $\varphi \neq 0$, ex. $x \in A$ mit $\varphi(x) \neq 0$.

Dann $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(x)\varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 1$.

(c) $\varphi(\varphi(a)\cdot 1 - a) \overset{(a)}{=} 0 \Rightarrow \varphi(a)\cdot 1 - a$ nicht invertierbar $\Rightarrow \varphi(a) \in \operatorname{Sp} a$

(x invertierbar $\Rightarrow 1 = \varphi(1) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$)

(b) Da $\operatorname{Sp} a \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|a\|\}$, ist $|\varphi(a)| \overset{(c)}{\leq} \|a\| \;\forall a \in A \Rightarrow \|\varphi\| \leq 1$.

Ist $\|1\| = 1$, so ist $\|\varphi\| = 1$; da $|\varphi(1)| = 1$ (für $\|1\| = 1$).

(d) Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = \alpha + \beta i$, $\varphi(x^*) = \gamma + \delta i$.

z.z.: $\alpha = \gamma$, $\beta = -\delta$ (dann $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$)

Annahme: $\beta + \delta \neq 0$. Dann $c := \dfrac{x + x^* - (\alpha+\gamma)1}{\beta+\delta}$ mit $c = c^*$, $\varphi(c) = i$

Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ ist dann $\varphi(c + \lambda i) = (1+\lambda)i$, also $|1+\lambda| \overset{(b)}{\leq} \|c + \lambda i\|$.

Somit $1 + 2\lambda + \lambda^2 = |1+\lambda|^2 \leq \|c + \lambda i\|^2 = \|\underbrace{(c+\lambda i)^*}_{= c - \lambda i}(c + \lambda i)\| = \|c^2 + \lambda^2\| \leq \|c^2\| + \lambda^2$

$\Rightarrow 1 + 2\lambda \leq \|c^2\| \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ↯

Analog $\alpha - \gamma = 0$ (mit $d := \dfrac{ix + (ix)^* + 2\beta 1}{\alpha - \gamma}$). $\square$

Da $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(yx)$ $\forall x, y \in A$ in beliebigen Banachalgebren, können Charaktere die Nichtkommutativität von Elementen nicht sehen. Ist A also eine nichtkommutative Banachalgebra, so enthält $\operatorname{Spec} A$ unter Umständen nicht viel Information (s. Blatt 11, A3). Im kommutativen hingegen enthält $\operatorname{Spec} A$ sogar die volle Information! (s. später in diesem Kapitel). Die wesentliche Information ist dann im Kern des Charakters enthalten.

9.14 <u>Proposition:</u> Sei A eine kommutative, unitale Banachalgebra.

Dann ist die Abbildung $\operatorname{Spec} A \to \{\text{maximale Ideale in } A\}$, $\varphi \mapsto \ker \varphi$ bijektiv.

Beweis: Surj.: Sei $I \subseteq A$ maximal. Dann ist I abgeschlossen (9.11(c)) und A/I ist eine Banachalgebra (9.11(a)).

Außerdem ist A/I ein Körper: Sei $\pi: A \to A/I$ und $\pi(a) \neq 0$.

Setze $J := \{ba + x \mid b \in A, x \in I\}$. Dann ist $J \subseteq A$ ein zweiseitiges Ideal ($(ba+x) + (b'a+x') = \underbrace{(b+b')}_{\in A}a + \underbrace{(x+x')}_{\in I}$,
$(ba+x)c = bac + xc = \underbrace{bc}_{\in A}a + \underbrace{xc}_{\in I}$ $\forall c \in A$, ebenso $c(ba+x) \in J$)
und $I \subsetneq J$ (für $b=0$ ist $I \subseteq J$, für $b=1, x=0$ ist $I \neq J$, denn $a \notin I$ wegen $\pi(a) \neq 0$)
$\overset{I \text{ maximal}}{\Longrightarrow} J = A$, d.h. $1 \in J$ und also $1 = ba + x$ für ein $b \in A, x \in I$
$\Rightarrow \pi(b)\pi(a) = \pi(ba+x) = 1$, ebenso rechtsinvertierbar $\Rightarrow \pi(a)$ invertierbar.

Somit ist A/I ein Körper und nach 9.9 also $A/I \cong \mathbb{C}$,
d.h. $\pi: A \to A/I = \mathbb{C}$ ist ein Charakter mit $I = \ker \pi$.

Inj.: $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$, dann $\varphi_1(a)1 - a \in \ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$
$\Rightarrow 0 = \varphi_2(\varphi_1(a)1 - a) = \varphi_1(a) - \varphi_2(a) \Rightarrow \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \quad \forall a \in A$.

Wohldef.: $\varphi \in \operatorname{Spec} A$, dann $\ker\varphi \subseteq A$ Ideal ($\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = 0 \ \forall x \in I, a \in A$)
Und $\ker\varphi \neq A$, da $\varphi(1) = 1 \neq 0$. $\ker\varphi$ ist maximal, denn nach 9.11(d) und der Surjektivität der Abbildung $\operatorname{Spec} A \to \{\text{max. Ideale}\}$ ex. $\psi \in \operatorname{Spec} A$ mit $\ker\varphi \subseteq \ker\psi$, $\ker\psi$ maximal.
Also $\varphi(a)1 - a \in \ker\varphi \subseteq \ker\psi \Rightarrow 0 = \psi(\varphi(a)1 - a) = \varphi(a) - \psi(a)$ $\forall a$ □

9.15 Korollar: Sei A kommutative, unitale Banachalgebra, $a \in A$.
(a) $a \in A$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \varphi(a) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \operatorname{Spec} A$
(b) $\lambda \in \operatorname{Sp} a \Leftrightarrow \varphi(a) = \lambda$ für ein $\varphi \in \operatorname{Spec} A$, d.h. $\operatorname{Sp} a = \{\varphi(a) \mid \varphi \in \operatorname{Spec} A\}$

Beweis: (a) „$\Rightarrow$" 9.13(c) „$\Leftarrow$" Ist a nicht invertierbar, so ist $I := \{ba \mid b \in A\}$ ein nichttriviales Ideal ($1 \notin I$), also $I \subseteq \ker\varphi$, ein $\varphi \in \operatorname{Spec} A$. $\Rightarrow \varphi(a) = 0$.
(b) $\lambda \in \operatorname{Sp} a \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \exists \varphi \in \operatorname{Spec} A: \varphi(\lambda - a) = 0$, d.h. $\varphi(a) = \lambda$ □

9.16 Proposition: Sei A unitale Banachalgebra. Dann ist $\operatorname{Spec} A$ kompakt.

Beweisidee: • Satz von Tychonov (äquivalent zum Auswahlaxiom):
Jedes Produkt von kompakten Räumen ist kompakt.

• Sei E ein normierter Raum, $(E')_1 := \{x \in E' \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq E'$ die abgeschlossene Einheitskugel im Dualraum E'.
Versehe $(E')_1$ mit der Stellenweisen Topologie der punktweisen Konvergenz:
$$\varphi_\lambda \to \varphi \;:\Leftrightarrow\; \varphi_\lambda(x) \to \varphi(x) \quad \forall x \in E$$
Dann ist $(E')_1$ eine abgeschlossene Teilmenge (nicht trivial) des Produkts
$\prod_{x \in E_1} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$, das nach Tychonov kompakt ist.

• $\operatorname{Spec} A \overset{9.13}{\subseteq} (A')_1$ abgeschlossene Teilmenge: Sei $(\varphi_\lambda) \subseteq \operatorname{Spec} A$ mit $\varphi_\lambda \to \varphi$ punktweise, $\varphi \in (A')_1$. Da $\varphi_\lambda(1) = 1 \;\; \forall \lambda$, auch $\varphi(1) = 1$, d.h. $\varphi \neq 0$. Außerdem $\varphi(xy) \leftarrow \varphi_\lambda(xy) = \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) \to \varphi(x)\varphi(y)$
$\Rightarrow \varphi \in \operatorname{Spec} A$ $\square$

9.17 Beispiel: Sei X kompakter, topologischer Raum. Dann ist $C(X)$ eine kommutative, unitale Banachalgebra. Was ist $\operatorname{Spec} C(X)$?
Sei $t \in X$. Setze $\varphi_t : C(X) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(t)$. Also $\varphi_t \in \operatorname{Spec} C(X)$ $\forall t \in X$.
Es gilt: $\Psi : X \to \operatorname{Spec} C(X)$, $t \mapsto \varphi_t$ ist ein Homöomorphismus (bijektiv, stetig, mit stetiger Umkehrabbildung).
Also gilt $\operatorname{Spec} C(X) \cong X$ als topologische Räume.
Ψ stetig: Ist $t_\lambda \to t$ in X (vgl. 1.9), so gilt $\varphi_{t_\lambda}(f) = f(t_\lambda) \to f(t) = \varphi_t(f)$ $\forall f \in C(X)$
$\Rightarrow \varphi_{t_\lambda} \to \varphi_t$
Ψ injektiv: Zu $s, t \in X$, $s \neq t$ ex. $f : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(s) \neq f(t)$ (nach dem Lemma von Urysohn. Ist X metrisch, so nehme $f(y) := d(s, y)$)
Dann ist $\varphi_s(f) = f(s) \neq f(t) = \varphi_t(f)$, d.h. $\varphi_s \neq \varphi_t$.

Ψ surjektiv: Nach 9.14 genügt es zu zeigen: Ist $I \subseteq \mathcal{C}(X)$ ein maximales Ideal, so ex. $t \in X$ mit $I = \operatorname{Kern} \varphi_t$
(dann: $\varphi \in \operatorname{Spec} \mathcal{C}(X) \Rightarrow \ker \varphi = \ker \varphi_t \Rightarrow \varphi = \varphi_t$, wie im Beweis von 9.14)
Das lassen wir hier weg.

Ψ^{-1} stetig: Ψ ist eine stetige, bijektive Abbildung zwischen kompakten Räumen. Also ist für eine abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ (d.h. A kompakt) die Menge $(\Psi^{-1})^{-1}(A) = \Psi(A) \subseteq \operatorname{Spec} \mathcal{C}(X)$ abgeschlossen (da kompakt).
$\Rightarrow \Psi^{-1}$ stetig.

9.18 Satz: Sei A eine Banachalgebra mit 1. ~~Definiere~~ Die Gelfandtransformation

$$\mathcal{X}: A \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A), \quad x \mapsto \hat{x}$$

~~ist~~ durch $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$.

(a) $\mathcal{X}$ ist ein stetiger Algebrenhomomorphismus.

(b) Ist A kommutativ, so gilt $\|\mathcal{X}(x)\|_\infty = r(x)$ und $\hat{x}(\operatorname{Spec} A) = Sp(x)$.

(c) Ist A sogar kommutative C^*-Algebra mit Eins, so ist $\mathcal{X}$ sogar ein isometrischer Algebren-Isomorphismus, der die Involution erhält (isometrischer *-Isomorphismus).

„Satz von Gelfand-Neumark"

Beweis: (a) $\widehat{x+y}(\varphi) = \hat{x}(\varphi) + \hat{y}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

$\widehat{xy}(\varphi) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

$|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \le \|x\| \quad \forall \varphi \Rightarrow \|\mathcal{X}(x)\| = \|\hat{x}\|_\infty \le \|x\|$.

(b) $\hat{x}(\operatorname{Spec} A) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \operatorname{Spec} A\} \overset{9.15}{=} Sp(x)$.

Insofern ist $r(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp(x)\}$
$= \sup\{|\hat{x}(\varphi)| \mid \varphi \in \operatorname{Spec} A\}$
$= \|\hat{x}\|_\infty$.

(c) Nach 9.13 ist φ $*$-Hom. $\forall \varphi \in \operatorname{Spec} A$.

Also $\chi(x^*)(\varphi) = \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\chi(x)(\varphi)}$, d.h. χ ist $*$-Hom.

bz.z.: χ ist isometrisch und surjektiv.

Da A kommutativ ist, gilt $x^*x = xx^*$ $\forall x \in A$.

Also $\|x\| \overset{9.8}{=} r(x) \overset{(B)}{=} \|\chi(x)\|_\infty$, d.h. χ ist isometrisch.

Betrachte nun $\chi(A) \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$.

Dann ist $\chi(A)$ eine $*$-Unteralgebra von $\mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$ ($\hat{x}, \hat{y} \in \chi(A) \Rightarrow \hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy} \in \chi(A)$ etc), die die Punkte trennt: $\varphi, \psi \in \operatorname{Spec} A$, $\varphi \neq \psi$, dann ex. $x \in A$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$

$\Rightarrow \chi(x)(\varphi) = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x) \neq \psi(x) = \chi(x)(\psi)$

$\chi(A)$ ist abgeschlossen, da χ isometrisch ist:

Ist $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \chi(A)$ eine Cauchyfolge, so gilt

$$\|x_n - x_m\| = \|\chi(x_n - x_m)\|_\infty = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N.$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ eine Cauchyfolge $\Rightarrow \exists x \in A$ mit $x_n \to x$ und also $\hat{x}_n \to \hat{x}$, d.h. $\chi(A)$ ist vollständig und somit abgeschlossen.

Nach Stone-Weierstraß (E.3) also $\chi(A) = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} A)$. $\square$

9.19 Korollar (1. Fundamentalsatz der C^*-Algebren): Ist K ein kompakter, topologischer Raum, so ist $\mathcal{C}(K)$ eine kommutative C^*-Algebra mit 1. Umgekehrt ist jede kommutative C^*-Algebra von dieser Form.

9.20 Bemerkung: Für Banachalgebren ist das falsch.

Auf Blatt 11 wurde gezeigt, dass $\ell^1(\mathbb{Z})$ mit der Faltung eine kommutative Banachalgebra (mit Eins) ist. Es gilt $\operatorname{Spec}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \mathbb{T}$. Die Gelfandtransformation $\chi: \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}(\mathbb{T})$ ist also hier nichts anderes als die Fouriertransformierte $\left(\chi(x)(z) \cong \chi(x)(\varphi_z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n \text{ für } x = (\alpha_n)\right)$.

χ ist in diesem Fall injektiv, aber nicht surjektiv, also sind $\ell^1(\mathbb{Z})$ und $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ nicht isomorph.

Mit Hilfe der Gelfandtransformation kann man ebenfalls den Satz von Wiener zeigen: Hat $f \in C(\mathbb{T})$ eine absolut konvergente Fourierreihe und ist $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{T}$, so hat auch $\frac{1}{f}$ eine absolut konvergente Fourierreihe (studiere dafür das Bild von $\ell^1(\mathbb{Z})$ unter der Gelfandtransformation).

9.21 Definition: Sei A C^*-Algebra mit Eins.

(a) Ist $M \subseteq A$ eine Teilmenge, so ist $C^*(M) := \bigcap\limits_{\substack{B \subseteq A \text{ } C^*\text{-Unteralgebra},\ M \subseteq B}} B$.

(b) Ist $x \in A$, so ist $C^*(x,1) := C^*(\{x,1\}) \subseteq A$ die kleinste Unter-C^*-Algebra von A, die x und 1 enthält.

(c) Ein nichtkommutatives Monom in x_1 und x_2 ist $x_i^{k_1} x_j^{k_2} x_i^{k_3} x_j^{k_4} \cdots x_i^{k_m}$, $k_i \in \mathbb{N}_0$. Ein nichtkommutatives Polynom ist eine Linearkombination solcher Monome.

9.22 Bemerkung: (a) Ist A eine C^*-Algebra mit 1, so ist
$$C^*(x,1) = \overline{\{\text{Polynome in } x, x^*\}} \subseteq A$$
(denn $\{\text{Polynome}\} \subseteq C^*(x,1) \Rightarrow \overline{\{\dots\}} \subseteq C^*(x,1)$, da $C^*(x,1)$ abgeschlossen. Andererseits ist $\overline{\{\dots\}} \subseteq A$ (abgeschlossene) C^*-Unteralg. mit $x, 1 \in \overline{\{\dots\}}$)

(b) Ist $x \in A$ normal, so ist $C^*(x,1)$ kommutativ (denn $\{\text{Polynome}\}$ komm.).

9.23 Lemma: Sei A unitale C^*-Algebra, $x \in A$ normal.

(a) $\operatorname{Sp}_A y = \operatorname{Sp}_{C^*(x,1)} y \quad \forall y \in C^*(x,1)$

(b) Die Abbildung $\chi(x)$: $\operatorname{Spec} C^*(x,1) \to \operatorname{Sp} x$, $\varphi \longmapsto \varphi(x)$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis: (a) $\lambda - y$ invertierbar in $C^*(x,1) \Rightarrow \lambda - y$ invertierbar in A. Für „$\in$" betrachte $B := C^*(x, (\lambda-y)^{-1}, 1)$, kommutative C^*-Algebra mit 1.
($x(\lambda-y) = (\lambda-y)x$, da $x, y \in C^*(x,1)$, dies kommutative C^*-Alg.
$\Rightarrow x(\lambda-y)^{-1} = (\lambda-y)^{-1}x \Rightarrow$ auch für alle Polynome und Abschluss)

Betrachte Gelfandtransformation $\mathcal{X}_B : B \to \mathcal{C}(\operatorname{Spec} B)$ und $\mathcal{X}_B(C^*(x,1)) \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{Spec} B)$. Zeige, dass dies punktetrennende, abgeschlossene $*$-Unteralgebra ist, nach Stone-Weierstraß also $\mathcal{X}_B(C^*(x,1)) = \mathcal{C}(\operatorname{Spec} B) = \mathcal{X}_B(B)$

$\overset{\mathcal{X}_B \text{ inj.}}{\Longrightarrow} \; C^*(x,1) = B = C^*(x, (\lambda-y)^{-1}, 1) \ni (\lambda-y)^{-1}$.

Somit $\lambda - y$ invertierbar in $C^*(x,1)$.

(b) $\mathcal{X}(x)$ ist surjektiv nach 9.18 (b) und injektiv, da für $\varphi, \psi \in \operatorname{Spec} C^*(x,1)$ mit $\varphi(x) = \psi(x)$ gilt: $C := \{ y \in C^*(x,1) \mid \varphi(y) = \psi(y) \}$ enthält $\{x, 1\}$ und ist abgeschlossen unter Multiplikation, Addition, Involution (da φ, ψ $*$-Hom.) und ist abgeschlossen. Also ist C C^*-Algebra mit $C^*(x,1) \subseteq C \subseteq C^*(x,1)$, d.h. $\varphi = \psi$. Außerdem ist $\mathcal{X}(x)$ stetig (per Def.) und $\mathcal{X}(x)^{-1}$ stetig.

(Abb. zw. komp. Räumen) □

9.24 Satz (stetiger Funktionalkalkül): Sei A eine C^*-Algebra mit 1, $a \in A$ normal. Dann gibt es genau einen isometrischen $*$-Isomorphismus $\Phi : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}(a)) \longrightarrow C^*(a,1) \subseteq A$, $\Phi(\mathrm{id}) = a$, $\Phi(1) = 1$.

Wir schreiben dann auch $f(a) := \Phi(f)$.

Beweis: Existenz: $\mathcal{C}(\operatorname{Sp}(a)) \overset{9.23}{\cong} \mathcal{C}(\operatorname{Spec} C^*(a,1)) \overset{9.18}{\cong} C^*(a,1)$

und $\Phi^{-1}(a)(\lambda) \underset{\uparrow}{=} \mathcal{X}(a)(\varphi) = \varphi(a) = \lambda$, d.h. $\Phi^{-1}(a) = \mathrm{id}$.
für $\lambda = \varphi(a)$

Eind.: Ist $\psi : C^*(a,1) \to \mathcal{C}(\operatorname{Sp}(a))$ $*$-Isom. mit $\psi(a) = \mathrm{id}$, $\psi(1) = 1$, so ist wie in 9.23 (b) $C := \{ y \in C^*(a,1) \mid \psi(y) = \Phi^{-1}(y) \}$ C^*-Algebra mit $\{a, 1\} \subseteq C$ $\Rightarrow C = C^*(a,1)$, d.h. $\psi = \Phi^{-1}$. □

Zusammen mit Bemerkung 9.22 erklärt sich die Idee des Funktionalkalküls: Für Polynome $p \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp}(a))$ ist $p(a)$ einfach durch Einsetzen gegeben. Ausweitung auf alle stetigen Funktionen erfolgt dann per Stone-Weierstraß (s. 9.18)

9.25 Proposition: Der Funktionalkalkül für $x \in A$ normal, A C^*-Algebra mit 1, hat folgende Eigenschaften:

(a) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\bar{f}(x) = f(x)^*$ $\forall f,g \in \mathcal{C}(Sp\, x)$

(b) $Sp\, f(x) = f(Sp\, x)$ $\quad \forall f \in \mathcal{C}(Sp\, x)$

(c) Ist g stetig auf $f(Sp\, x)$, so gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

(d) Ist x selbstadjungiert, so ist $Sp\, x \subseteq \mathbb{R}$ und x lässt sich zerlegen als $x = x_+ - x_-$, $Sp\, x_+, Sp\, x_- \subseteq [0,\infty)$, $x_+ x_- = x_- x_+ = 0$.

Beweis: (a) $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ etc., da Φ $*$-Hom.

(b) $\lambda \notin Sp\, f(x) \iff \lambda - f(x) = \Phi(\lambda 1 - f)$ invertierbar

$\iff \lambda 1 - f$ in $\mathcal{C}(Sp\, x)$ invertierbar

$\iff f(\mu) \neq \lambda$ $\forall \mu \in Sp\, x$, d.h. $\lambda \notin f(Sp\, x)$

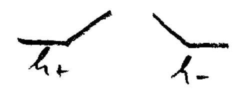
(c)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(Sp\, x) \arrow[dr, "\Phi"] & \\
\mathcal{C}(Sp\, f(x)) \arrow[ur, "g \mapsto g\circ f"] \arrow[rr, bend left, "\alpha_1"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\Phi"', "g \mapsto g(f(x))"] & & C^*(x,1) \\
 & C^*(f(x),1) \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

$A := \{h \in \mathcal{C}(Sp(f(x))) \mid \alpha_1(h) = \alpha_2(h)\} \subseteq \mathcal{C}(Sp\, f(x))$
abgeschl. $*$-Unteralgebra, die die Punkte trennt ($id \in A$).
Nach Stone-W. also $A = \mathcal{C}(Sp\, f(x))$.

(d) Für $id \in \mathcal{C}(Sp(x))$ gilt $\Phi(\overline{id}) = \Phi(id)^* = x^* = x = \Phi(id)$
Φ inj., $\overline{id} = id$, d.h. $Sp\, x \subseteq \mathbb{R}$.

Mit $h_+(t) := \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $h_-(t) := \begin{cases} -t & t \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



ist also $h_+ - h_- = id$ auf $\mathbb{R}$ und somit für $x_+ := h_+(x)$, $x_- := h_-(x)$ das Gewünschte. $\square$

9.26 <u>Beispiel</u>: Sei A eine unitale C^*-Algebra, $u \in A$ unitär.
Sei $\lambda_0 \in S^1$ mit $\lambda_0 \notin \mathrm{Sp}\, u$ ($\mathrm{Sp}\, u \subseteq S^1$ nach Blatt 11, u normal).
Dann ist $f(z) := \arg(z) := \vartheta$ für $z = e^{i\vartheta}$ stetig auf $\mathrm{Sp}\, u \subseteq S^1$ und reellwertig. Dann ist $x := f(u) \in A$ selbstadjungiert (9.25) und $e^{ix} = u$ (denn mit $g(t) := e^{it}$ ist $g \circ f = \mathrm{id}$).
Kann also solche Unitäre in „Polarkoordinaten" schreiben.

9.27 <u>Definition</u>: Sei A eine C^*-Algebra mit Eins, $x \in A$.
x heißt <u>positiv</u>, falls $x = x^*$ und $\mathrm{Sp}\, x \subseteq [0,\infty)$.

9.28 <u>Proposition</u>: Jedes positive Element in einer unitalen C^*-Algebra besitzt eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel,
d.h. $x \in A$ positiv $\Rightarrow \exists!\, y \in A$ positiv mit $y^2 = x$.

<u>Beweis</u>: Existenz: Funktionalkalkül $y := \sqrt{x}$ für $\sqrt{\cdot}$ auf $\mathrm{Sp}\, x \subseteq [0,\infty)$.
Dann ist $y = y^*$, $\mathrm{Sp}\, y = \mathrm{Sp}\sqrt{x} = \sqrt{\cdot}\,(\mathrm{Sp}\, x) \subseteq [0,\infty)$.
Eindeutigkeit: Klar in $C^*(x,1) \subseteq A$.
($f_1(x) = y_1$ und $f_2(x) = y_2$ positive Wurzeln, dann f_1, f_2 reellwertig und $f_i\, \mathrm{Sp}(x) = \mathrm{Sp}\, f_i x \subseteq [0,\infty) \Rightarrow f_1 = f_2$).
Sei aber nun $y \in A$ positiv, $y^2 = x$. Bzz.: $y \in C^*(x,1)$.
$C^*(x,1) \underset{(x = y^2)}{\subseteq} C^*(y,1) \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, y)$. Zeige, dass $\Phi^{-1}(C^*(x,1)) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, y)$ punktetrennende $*$-Unteralgebra ist, nach Stone-W. also „=".
Somit $C^*(x,1) = C^*(y,1) \ni y$. $\square$

9.29 <u>Korollar</u>: Jeder positive Operator in $\mathcal{L}(H)$ besitzt eine eindeutige positive Quadratwurzel.