§ 10 Der Spektralsatz für normale Operatoren auf Hilberträumen

__Motivation:__ • Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Sei H ein endlich-dimensionaler Hilbertraum, $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$ und $Sp(A) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A.
Dann ist A diagonalisierbar, d.h. $A = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda P_\lambda$ für P_λ Projektion auf $\ker(\lambda 1 - A)$, den Eigenraum. Es ist dann $P_\lambda \perp P_\mu$ für $\lambda \neq \mu$ und $H = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} \ker(\lambda 1 - A)$, also $\sum_{\lambda \in Sp(A)} P_\lambda = 1$.

D.h.
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_n \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

• Verallgemeinerung zu $\dim H = \infty$? Kennen diese für $A = A^* \in K(H)$, siehe 8.12: $A = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda P_\lambda$ für P_λ Proj. auf $\ker(\lambda 1 - A)$ (endl. dim. für $\lambda \neq 0$)
und $Sp(A) = \{\text{Eigenwerte von } A\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ (abzählbar viele), $P_\lambda \perp P_\mu$, $\lambda \neq \mu$

• nichtkompakte Operatoren? Problem: Ist λ ein Spektralwert von $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$, so ist λ i.A. kein Eigenwert, d.h. es gibt keine Eigenvektoren und wir wissen nicht, wie man P_λ definieren soll.

Idee: ① Schreibe $A = \int_{Sp\,A} t \, dE(t)$ für eine Art „Maß" mit Werten in den Operatoren $\leadsto$ Spektralmaße

② Nach 9.24 ist $C(Sp\,A) \cong C^*(A, 1) \subseteq \mathcal{L}(H)$ für A normal, d.h. die Information über A steckt im Spektrum (wie im Spektralsatz $\hat{=}$ „Diagonalisierung" + „Spektrum ist wesentliche Information")

$\leadsto$ Verfeinerung des Funktionalkalküls

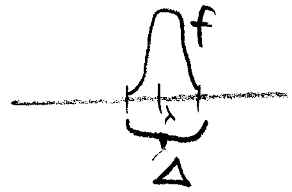
10.1 Beispiel: $H = L^2[0,1]$, $A: H \to H$, $f \mapsto Af$, $Af(t) := t f(t)$.

Dann $A = A^*$ $\left(\langle g, Af\rangle = \int g(t)\overline{t f(t)}\,dt = \int t g(t)\overline{f(t)}\,dt = \langle Ag, f\rangle\right)$

$\|A\| \le 1$ $\left(\|Af\|^2 = \int_0^1 |t f(t)|^2\,dt \le \int |f(t)|^2\,dt = \|f\|^2\right)$

$Sp\,A = [0,1]$ (wie in 7.6) aber $\sigma_p(A) = \emptyset$, d.h. es gibt keine Eigenvektoren und $A = \sum_{\lambda \in sp(A)} \lambda P_\lambda$ macht keinen Sinn ($P_\lambda = 0\ \forall \lambda$).

Idee: Ist $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ ein kleines Intervall um $\lambda \in Sp(A)$, so gibt es approximierende Eigenvektoren, also $Af \approx \lambda f$.



Betrachte dann $E(\Delta): H \to H_\Delta$, $f \mapsto f_{|\Delta}$ orth. Projektion, wo $H_\Delta := \{f \in H \mid f_{|\Delta^c} \equiv 0 \text{ f.ü.}\} \subseteq H$.

Dies verhält sich wie ein Maß: $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset \Rightarrow E(\Delta_1)E(\Delta_2) = 0$, $\Delta = \Delta_1 \dot\cup \Delta_2 \Rightarrow E(\Delta) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$, $\sum_{i=1}^n E(\Delta_i) = 1$ für $\dot\bigcup_{i=1}^n \Delta_i = \mathbb{R}$

Also $Af = \sum_i \underbrace{AE(\Delta_i)f}_{\approx \lambda_i E(\Delta_i) f}$ für $\lambda_i \in \Delta_i$, d.h. $A \mathrel{\hat=} \int \lambda\, dE(\lambda)$

Wie bekommt man nun ein solches Spektralmaß?

Sei $f = \chi_\Delta$, also $\chi_\Delta(t) = \begin{cases} 1 & t \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ charakteristische Funktion.

Dann $\chi_\Delta(A) \mathrel{\hat=} \int \chi_\Delta(\lambda)\, dE(\lambda) = E(\Delta)$. Benötige also Funktionalkalkül, der charakteristische Funktionen erlaubt (nicht stetig).

Klar: $\chi_\Delta^2 = \chi_\Delta = \overline{\chi_\Delta}$ $\Rightarrow \chi_\Delta(A)$ Projektion.

Will also Erweiterung:

$$\begin{array}{ccc} B_b(Sp\,x) & \longrightarrow & W^*(x,1) \subseteq \mathcal{L}(H) \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \mathcal{C}(Sp\,x) & \longrightarrow & C^*(x,1) \end{array}$$

10.2 Definition: (a) Sei X eine Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{f: X \to \mathbb{C}$ Funktion$\}$.
(f_n) konvergiert beschränkt punktweise gegen $f: X \to \mathbb{C}$, falls
(i) $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$, (ii) $\exists C \geq 0$ $|f_n(x)| \leq C$ $\forall x\in X$

(b) Sei X kompakter, metrischer Raum.
$B_b(X) := \{f: X \to \mathbb{C}$ beschränkte Borelmessbare Funktionen$\}$

(c) Sei H ein Hilbertraum, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{L}(H)$. Setze
$$x_\lambda \xrightarrow{w} x \;:\Longleftrightarrow\; |\langle x_\lambda \xi, \eta\rangle| \to |\langle x\xi, \eta\rangle| \quad \forall \xi,\eta\in H.$$
(d) $x \in \mathcal{L}(H)$. $\quad W^*(x,1) := \overline{C^*(x,1)}^{w} \subseteq \mathcal{L}(H)$.

10.3 Bemerkung: (a) Die Konvergenz $x_\lambda \xrightarrow{w} x$ ist gegeben durch die lokalkonvexe Topologie $(\rho_{\xi,\eta})_{\xi,\eta\in H}$, $\rho_{\xi,\eta}(x) := |\langle x\xi,\eta\rangle|$.
Sie heißt „schwache Operatortopologie". Es gilt: $x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} x$
$\Rightarrow x_\lambda \xrightarrow{w} x$
$$\left(|\langle x_\lambda\xi,\eta\rangle| - |\langle x\xi,\eta\rangle| \leq |\langle (x_\lambda - x)\xi,\eta\rangle| \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|x_\lambda - x\|\,\|\xi\|\,\|\eta\| \to 0 \right)$$
Also ist $W^*(x,1) \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine C^*-Algebra ($\|\cdot\|$-abgeschl. $*$-Unteralg.).
Sowie gilt $C^*(x,1) \subseteq W^*(x,1)$.

(b) In der schwachen Operatortopologie ist die Multiplikation nicht stetig, aber es gilt $x_\lambda \xrightarrow{w} x \Rightarrow x_\lambda y \xrightarrow{w} xy$.
Die Involution ist stetig.

10.4 Lemma: Sei X kompakter, metrischer Raum. Dann ist $B_b(X)$ die kleinste Teilmenge $M \subseteq \{f: X \to \mathbb{C}\}$, die $C(X)$ enthält und abgeschlossen ist unter beschränkt punktweiser Konvergenz.

<u>Beweis:</u> $B_b(X)$ enthält $\mathcal{C}(X)$, da stetige Funktionen messbar sind und auf X (kompakt) beschränkt sind. Außerdem ist $B_b(X)$ abgeschlossen unter beschr. punktw. Konvergenz ($f(t)=\lim f_n(t)$ für $t\in X$ ist messbar und beschränkt).

Sei nun M eine Menge wie in der Aussage. Also $M\subseteq B_b(X)$.

bzz. „$\supseteq$“. 1.) Die Menge $\mathcal{G}:=\{A\subseteq X \mid \chi_A\in M\}$ ist eine σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen $U\subseteq X$ enthält.

(z.B.: $X\subseteq\mathbb{R}$, $U\subseteq X$ offenes Intervall  stetige Approx.
Allgemein: Urysohn)

$\Rightarrow \mathcal{B}_X\subseteq\mathcal{G}$, d.h. $\mathcal{G}$ enthält die Borelsche σ-Algebra.

2.) M ist ein Vektorraum: Ist nämlich $f\in\mathcal{C}(X)$, so erfüllt $M_f:=\{g:X\to\mathbb{C}\mid f+g\in M\}$ die Voraussetzungen des Lemmas, d.h. $M\subseteq M_f$. Also $f+M\subseteq M$ $\forall f\in\mathcal{C}(X) \Rightarrow \mathcal{C}(X)+M\subseteq M$

$\Rightarrow M_f$ erfüllt die Vor. $\forall f\in M$, d.h. $f+M\subseteq M$ $\forall f\in M \Rightarrow M+M\subseteq M$.

Ebenso $\lambda M\subseteq M$ $\forall \lambda\in\mathbb{C}$.

3.) Sei nun $f\in B_b(X)$. Dann gibt es eine Folge von Elementarfunktionen $\left(s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}\right)$, die f approximiert. Nach 1.) und 2.) sind gerade alle Elementarfunktionen in M, also auch $f\in M$. □

21.1.

10.5 Satz: Sei $x\in\mathcal{L}(H)$ normal. Der Funktionalkalkül $\Phi:\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,x)\to C^*(x,1)$ besitzt genau eine Fortsetzung zu einem $*$-Homomorphismus $\tilde{\Phi}: B_b(\mathrm{Sp}\,x)\to W^*(x,1)$, so dass $\|\tilde{\Phi}(f)\|\le\|f\|_\infty$ und $f_n\to f$ beschr. pktw. $\Rightarrow \tilde{\Phi}(f_n)\xrightarrow{w}\tilde{\Phi}(f)$.

Schreibe wieder $f(x):=\tilde{\Phi}(f)$ $\quad\forall f\in B_b(\mathrm{Sp}\,x)$

(„messbarer Funktionalkalkül“)

Beweis: Eindeutigkeit: Ist Ψ ein weiterer $*$-Hom. wie $\tilde{\Phi}$, so gilt nach 10.4 $B_b(\mathrm{Sp}\,x) \subseteq M := \{f \in B_b(\mathrm{Sp}\,x) \mid \langle \tilde{\Phi}(f)\xi,\eta\rangle = \langle \Psi(f)\xi,\eta\rangle \ \forall \xi,\eta \in H\}$
$\subseteq B_b(\mathrm{Sp}\,x) \Rightarrow \tilde{\Phi} = \Psi$.

Existenz: 1.) Sei $\xi \in H$. Definiere $\Lambda_\xi : \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,x) \to \mathbb{C}$ durch $\Lambda_\xi(f) := \langle f(x)\xi,\xi\rangle$. Dann ist Λ_ξ positiv, linear und stetig. Nach dem Satz von Riesz gibt es dann ein Maß μ, sodass $\Lambda_\xi(f) = \int f(x)\,d\mu(x) \ \forall f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,x)$ gilt.
Also ist $\hat{\Lambda}_\xi : B_b(\mathrm{Sp}\,x) \to \mathbb{C}$, $\hat{\Lambda}_\xi(f) := \int f(x)\,d\mu(x)$ eine positive, lineare, stetige Fortsetzung von Λ_ξ mit $|\hat{\Lambda}_\xi(f)| \le \|f\|_\infty \|\xi\|^2$.
2.) Für $f \in B_b(\mathrm{Sp}\,x)$ definiert $B_f(\xi,\eta) := \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \hat{\Lambda}_{\xi + i^k\eta}(f)$ eine Sesquilinearform auf H (vgl. 5.9). Für festes $\eta \in H$ ist $\xi \mapsto B_f(\xi,\eta)$ ein lineares Funktional $\overset{5.17}{\Rightarrow} \exists!\, \zeta_\eta \in H$ mit $B_f(\xi,\eta) = \langle \xi, \zeta_\eta\rangle$.
Setze $T\eta := \zeta_\eta$, dann $T \in \mathcal{L}(H)$. Für $\tilde{\Phi}(f) := T^*$ gilt dann also $\|\tilde{\Phi}(f)\| = \|T^*\| = \|T\| \le \|f\|_\infty$

$(\|T\eta\| = \|\zeta_\eta\| \overset{5.4}{=} \|f_{\zeta_\eta}\| = |\langle\cdot,\zeta_\eta\rangle| = |B_f(\cdot,\eta)| \le \|f\|_\infty\|\eta\|)$

Und für $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,x)$:
$\langle f(x)\xi,\xi\rangle = \Lambda_\xi(f) = \hat{\Lambda}_\xi(f) = B_f(\xi,\xi) = \langle \xi, \zeta_\xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle = \langle \xi, \tilde{\Phi}(f)^*\xi\rangle$
$\Rightarrow \tilde{\Phi}$ setzt Φ fort. $\qquad = \langle \tilde{\Phi}(f)\xi,\xi\rangle$

Man rechnet dann noch nach, dass $\tilde{\Phi}$ ein w-stetiger $*$-Hom. ist.

$\square$

10.6 Korollar: Ist $x = x^* \in \mathcal{L}(H)$ (oder x normal), so kann x in $\|\cdot\|$ beliebig gut durch Projektionen approximiert werden.

Beweis: Nach 9.25 und 7.8 ex. a,b, sodass $\mathrm{Sp}\,x \subseteq [a,b]$. Sei $\varepsilon > 0$ und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ Unterteilung mit $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$.
Dann gilt $\|id_{[a,b]} - \sum_{i=0}^{n} t_{i-1}\chi_{(t_{i-1},t_i]}\|_\infty < \varepsilon$. $E_i := \chi_{(t_{i-1},t_i]}(x)$
($i=0$: $\chi_{[t_0,t_1]}$)
ist Projektion und $\|x - \sum t_{i-1}E_i\| < \varepsilon$.

$\square$

10.7 Definition: Sei H ein Hilbertraum und $(Y, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. $E: \mathcal{M} \to \{\text{Projektionen in } \mathcal{L}(H)\}$ heißt Spektralmaß, falls

(i) $E(\emptyset) = 0$, (ii) $E(Y) = 1$,

(iii) $E(\dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} M_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} E(M_i) \quad \forall M_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt

[Siehe auch das Skript von Prof. Speicher, Funktionalanalysis, WiSe 2012/2013, Kap. 14 zur Maßtheorie (Überblick)]

10.8 Satz: Sei $x \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann ist $E: \{\text{Borelmengen in } \operatorname{Sp} x\} \to \mathcal{L}(H)$ gegeben durch $E(A) := \chi_A(x)$ ein Spektralmaß mit:

(a) Ist $\xi \in H$ Eigenvektor zu x und zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $f(x)\xi = f(\lambda)\xi \quad \forall f \in B_b(\operatorname{Sp} x)$

(b) $E(\{\lambda\})$ ist orthogonale Projektion auf den Eigenraum von x zum Eigenwert λ. Insbesondere: λ Eigenwert $\Leftrightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0$

(c) Ist $\lambda \in \operatorname{Sp} x$ isoliert, so ist λ Eigenwert

Beweis: $\chi_\emptyset(x) = 0$, $\chi_{\operatorname{Sp} x}(x) = 1$, $\sum^n \chi_{A_i} \to \chi_{\dot{\bigcup}_{i\in\mathbb{N}} M_i}$ pktw. $\Rightarrow \sum^n E(M_i) \xrightarrow{w} E(\dot{\bigcup} M_i)$

(a): richtig für Polynome in x, x^*, also auch für $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} x)$: $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ Polynome, dann $f(x)\xi \leftarrow p_n(x)\xi = p_n(\lambda)\xi \to f(\lambda)\xi$.
Schließlich auch für Abschluss von punktweiser Konvergenz (10.4).

(b): $x E(\{\lambda\})\xi = \mathrm{id}(x)\chi_{\{\lambda\}}(x)\xi = (\lambda\chi_{\{\lambda\}})(x) = \lambda E(\{\lambda\}) \Rightarrow E(\{\lambda\})H \subseteq \mathrm{Eig}_\lambda$
umgekehrt $\chi_{\{\lambda\}}(x)\xi = \xi \quad \forall \xi \in \mathrm{Eig}_\lambda$ nach (a) $\Rightarrow \mathrm{Eig}_\lambda \subseteq E(\{\lambda\})H$

(c): Die Funktion $f(t) := \begin{cases} 1 & t = \lambda \\ 0 & t \in \operatorname{Sp} x \setminus \{\lambda\} \end{cases}$ ist stetig, da λ isoliert ist.
Also $\|E(\{\lambda\})\| = \|f(x)\| \overset{9.24}{=} \|f\|_\infty \neq 0$, dann (b).
Beachte: für $f \in B_b(\operatorname{Sp} x)$ ist i.A. nur $\|f(x)\| \leq \|f\|_\infty$, nicht „=". □

10.9 Korollar. $x \in \mathcal{L}(H)$ normal, E das Spektralmaß nach 10.8.

Definiere $\int_{Sp\,x} f(t)\, dE(t) := z \in \mathcal{L}(H)$, wo $\langle z\xi, \xi\rangle := \int_{Sp\,x} f(t)\, d\mu_\xi(t)$.

Hierbei ist durch $\mu_\xi : \{\text{Borelmengen} \cap Sp\,x\} \to [0,1]$, $A \longmapsto \langle E(A)\xi, \xi\rangle$ ein Maß gegeben. (nach 10.7)

Dann gilt $\quad x = \int_{Sp\,x} t\, dE(t) \quad$ und $\quad f(x) = \int_{Sp\,x} f(t)\, dE(t) \quad \forall f \in B_b(Sp\,x)$

Die Abbildung $B_b(Sp\,x) \to \mathcal{L}(H)$, $f \longmapsto \int f(t)\, dE(t)$ ist ein $*$-Hom.

10.10 Beispiel (vgl. 10.1): Für $H = L^2[0,1]$, $A : H \to H$, $f \longmapsto Af$,

$Af(t) := t f(t)$ definiert $E : \{\text{Borelmengen in } [0,1]\} \to \mathcal{L}(H)$, $B \longmapsto E(B)$

mit $E(B)f = \chi_B(A) f = f_{|B}$ das Spektralmaß aus 10.8.

Es ist
$$\mu_f(B) = \langle E(B)f, f\rangle = \int_0^1 \chi_B(t) f(t) \overline{f(t)}\, dt = \int_B |f(t)|^2\, dt$$

D.h. μ_f ist gegeben als Lebesguemaß mit Dichte $t \mapsto |f(t)|^2$

$$\Rightarrow \quad \langle \left(\int t\, dE(t)\right) f, f\rangle = \int_{Sp\,A} t\, d\mu_f(t) = \int_0^1 t\, |f(t)|^2\, dt = \int_0^1 (Af)(t)\overline{f(t)}\, dt = \langle Af, f\rangle$$

Dies zeigt $A = \int t\, dE(t)$.