§11 Unbeschränkte Operatoren

<u>Motivation:</u> In Kapitel 1 haben wir gesehen, dass $A: H \to H$ stetig ist, wenn A linear ist – falls $\dim H < \infty$ ist.
Für $\dim H = \infty$ gibt es Operatoren, die linear, aber <u>nicht</u> stetig sind (also unbeschränkte lineare Operatoren). Nachdem wir also beschränkte lineare Operatoren betrachtet haben, wenden wir uns nun unbeschränkten zu.

11.1 <u>Beispiel:</u> $H = L^2(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \int |f(t)|^2 dt < \infty\}$.
Betrachte $(Qf)(t) := t f(t)$, der „<u>Ortsoperator</u>". Dann ist Q jedoch nicht beschränkt, denn für $f = \chi_{[n,n+1]}$ ist $\|f\|_2^2 = \underbrace{\int |\chi_{[n,n+1]}(t)|^2 dt}_{=1}$
aber $\|Qf\|_2^2 = \int t^2 \chi_{[n,n+1]}(t)\, dt = \int_n^{n+1} t^2\, dt \geq n^2$
Q ist also nicht einmal auf ganz H definiert, denn es gibt $f \in H$ mit $Qf \notin H$.
Selbiges gilt für den „<u>Impulsoperator</u>" $(Pf)(t) := i f'(t)$.
P ist unbeschränkt und nicht auf ganz H definiert.
Insofern sollten wir für das Studium von unbeschränkten Operatoren eine Verkleinerung des Definitionsbereichs zulassen. Ziel ist, zu verstehen, wie sich das auf den Operator auswirkt und wie viel man von der Theorie für beschränkte Operatoren auch für unbeschränkte erhalten kann.

11.2 Def./Anm.: Sei H ein Hilbertraum.

(a) Ein (unbeschränkter) <u>Operator</u> T auf H ist gegeben durch $T: D(T) \to H$ linear, wobei $D(T) \subseteq H$ ein linearer Teilraum ist, der <u>Definitionsbereich</u> von T.

(b) Ist $\overline{D(T)} = H$, so heißt T <u>dicht definiert</u>.

(c) $G(T) := \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\} \subseteq H \times H$ heißt <u>Graph</u> von T.

(d) Ein Operator T_2 heißt <u>Erweiterung</u> von T_1 ($T_1 \subset T_2$), falls $D(T_1) \subseteq D(T_2)$ und $T_1 x = T_2 x \ \forall x \in D(T_1)$.
Äquivalent: $G(T_1) \subseteq G(T_2)$

(e) T heißt <u>abgeschlossen</u>, falls $G(T)$ abgeschlossen ist.

(f) T heißt <u>abschließbar</u>, falls $\overline{G(T)}$ Graph eines Operators ist. Schreibe $\overline{T}$ für den <u>Abschluss</u> von T (also $T \subseteq \overline{T}$).

11.3 Bemerkung: (a) Sind H_1, H_2 Hilberträume, so ist $H_1 \times H_2$ ein Hilbertraum ($H_1 \oplus H_2$) per $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$. Somit ist $(x_n, y_n) \to (x, y)$ äquivalent zu $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Ein Operator T ist also abgeschlossen genau dann, wenn $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ impliziert: $x \in D(T)$ und $Tx = y$. (Siehe 4.15)
Ist sogar $D(T) = H_1$, so ist T stetig (und also beschränkt).
28.1. (siehe die Charakterisierung von Stetigkeit über den Graphen, 4.16).

(b) Ein Teilraum $L \subseteq H \oplus H$ ist Graph eines Operators genau dann, wenn $\{(x,y) \in L \mid x = 0\} = \{(0,0)\}$ ist.

<u>Bew.:</u> „$\Rightarrow$" $x = 0 \Rightarrow (x,y) = (x, Tx) = (0,0)$

„$\Leftarrow$" $D(T) := \{x \in H \mid \exists y \in H : (x,y) \in L\}$. Setze $Tx := y$ für $(x,y) \in L$.
wohldefiniert: $(x, y_1), (x, y_2) \in L \Rightarrow (0, y_1 - y_2) \in L$, d.h. $y_1 = y_2$. $\triangleleft$

(c) T ist abschließbar, falls $x_n \to 0, Tx_n \to y \; (x_n \in D(T)) \Rightarrow y = 0$
(denn ist nämlich $(0,y) \in \overline{G(T)}$ und $\{(x,y) \in \overline{G(T)} \mid x = 0\} = \{(0,0)\}$)

(d) Ist $T: D(T) \to H$ injektiv, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} (mit $D(T^{-1}) := \text{Bild } T$) abgeschlossen ist.

(e) Die Komposition von abgeschlossenen Operatoren (mit passenden Definitionsbereichen) ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen.
Es gibt sogar Beispiele von stetigen linearen Operatoren S und abgeschlossenen linearen Operatoren T, so dass ST nicht abgeschlossen ist.

Wie steht es nun mit der Existenz von adjungierten Operatoren aus?
Schon im Fall beschränkter Operatoren müssen wir dazu einiges an Theorie bemühen (siehe 6.4).

11.4 Satz: Sei T dicht definiert auf H. Dann gilt:

(a) $D(T^*) := \{y \in H \mid x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ ist stetig auf $D(T)\} \subseteq H$ ist ein linearer Teilraum.

(b) Für jedes $y \in D(T^*)$ gibt es genau ein $T^*y \in H$ mit
$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x \in D(T)$.
Der Operator $T^*: D(T^*) \to H, \; y \mapsto T^*y$ ist dann linear.

(c) $G(T^*)$ ist abgeschlossen, d.h. T^* ist abgeschlossen.
Genauer gilt $G(T^*) = V(G(T)^\perp) = (VG(T))^\perp$ für den unitären Operator $V: H \oplus H \to H \oplus H, \; (x,y) \mapsto (y,-x)$ mit $V^2 = -1$.
Es gilt: $H \oplus H = \overline{VG(T)} \oplus G(T^*)$ und $\ker T^* = (\text{Bild } T)^\perp$.

(d) Ist T abgeschlossen, so gilt $T^{**} = T$, $D(T^*) \subseteq H$ dicht.

(e) $D(T^*) \subseteq H$ dicht $\Leftrightarrow$ T abschließbar ; T abschließbar $\Rightarrow \overline{T} = T^{**}$

(f) $T \subseteq S \Rightarrow S^* \subseteq T^*$

Beweis: (a) Setze $f_y(x) := \langle Tx, y\rangle$. $f_{\lambda y+\mu z}(x) = \bar\lambda f_y(x) + \bar\mu f_z(x)$ $\forall x \in D(T)$, da $\langle \cdot,\cdot \rangle$ antilinear in 2. Komponente $\Rightarrow$ $D(T^*)$ linearer TR.

(b) Betrachte $f_y : D(T) \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto \langle Tx, y\rangle$ stetig für $y \in D(T^*)$, also beschränkt, d.h. $|f_y(x)| \le C\|x\|$ $\forall x$ $\Rightarrow$ f_y lässt sich zu $\tilde f_y$ stetig, linear auf $\overline{D(T)} = H$ fortsetzen (1.12) $\overset{5.17}{\Longrightarrow}$ $\exists z \in H$, $\tilde f_y(x) = \langle x, z\rangle$, d.h. $\langle Tx, y\rangle = f_y(x) = \langle x, z\rangle$ $\forall x \in D(T)$. Setze $T^* y = z$ und rechne nach, dass linear.

Eind.: $\langle x, T_1^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T_2^* y\rangle$ $\forall x \in D(T)$

$\Rightarrow$ $\langle x, T_1^* y - T_2^* y\rangle$ $\forall x \in D(T)$, $\overline{D(T)} = H$ $\Rightarrow$ $T_1^* y = T_2^* y$

(c) $V^*(x,y) = (-y, x)$, denn $\langle V(x,y), (x',y')\rangle = \langle (x,y), (y',-x')\rangle$
$= \langle (-y,x), (x',y')\rangle$

Und $V^2 = -1$, $V^*V = VV^* = 1$ $\Rightarrow$ V unitär.

Des Weiteren $(x,y) \in G(T^*)$

$\Leftrightarrow$ $x \in D(T^*)$, $y = T^* x$

$\Leftrightarrow$ $\langle Tz, x\rangle = \langle z, y\rangle$ $\forall z \in D(T)$

$\Leftrightarrow$ $0 = \langle (z, Tz), (-y, x)\rangle = \langle \underbrace{(z,Tz)}_{\in G(T)}, V^*(x,y)\rangle$ $\forall z \in D(T)$
$= \langle V(z,Tz), (x,y)\rangle$

$\Leftrightarrow$ $(x,y) \perp VG(T)$, d.h. $(x,y) \in (VG(T))^\perp$

Da $(VG(T))^\perp$ abgeschlossen ist (5.14), ist $G(T^*)$ also abgeschlossen.

$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Bild} T)^\perp$ wie 6.6.

(d) $H \oplus H = G(T) \oplus VG(T^*)$ (da $V^2 = -1$, V unitär).

Sei $z \perp D(T^*)$, $y \in D(T^*)$. Dann $\langle (0,z), \underbrace{(-T^*y, y)}_{= V(y, T^*y)}\rangle = 0$

d.h. $(0,z) \in (VG(T^*))^\perp = G(T)$, also $z = T0 = 0$ $\Rightarrow$ $\overline{D(T^*)} = H$

Nach (c) $H \oplus H = VG(T^*) \oplus G(T^{**})$ $\Rightarrow$ $G(T) = G(T^{**})$, d.h. $T = T^{**}$

(e), (f) ähnlich.

$\square$

11.5 Bemerkung: Der messbare Funktionalkalkül lässt sich von $\mathcal{B}_b(X)$ auf beliebige messbare Funktionen auf X ausdehnen.
Analog zu Korollar 10.9 lässt sich dann ein (möglicherweise unbeschränkter) Operator definieren mit
$\langle \int_X f(t)\,dE(t)\,\xi, \xi \rangle = \int_X f(t)\,d\mu_\xi(t)$ für einen Raum X und $f: X \to \mathbb{C}$ messbar.
Der Definitionsbereich ist $\{ \xi \in H \mid \int_X |f(t)|^2 d\mu_\xi(t) < \infty \}$.

11.6 Beispiel: $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(Q) := \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int |t f(t)|^2 dt < \infty \} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ dicht
$(f \chi_{[-N,N]} \in D(Q) \ \forall f \in L^2)$
Definitionsbereich des Ortsoperators $(Qf)(t) := t f(t)$, Q dicht definiert.
Nach 11.4 ex. also Q^*. Wie sieht dieser Operator aus?

$g \in D(Q^*) \overset{11.4}{\iff} f \mapsto \langle Qf, g \rangle$ stetig auf $D(Q)$
$\iff |\int f(t)\, t\, \overline{g(t)}\, dt| = |\langle Qf, g\rangle| \leq C \|f\|_2 \ \forall f \in D(Q)$
$\iff (t \mapsto t g(t)) \in L^2(\mathbb{R})$
$\iff g \in D(Q)$

und $\langle Qf, g \rangle = \int t f(t) \overline{g(t)}\, dt = \int f(t)\, \overline{t g(t)}\, dt = \langle f, Qg \rangle$
$\implies Q = Q^*$.

11.7 Definition: Sei T dicht definiert auf H.
(a) T heißt symmetrisch, falls $T \subseteq T^*$.
(b) T heißt selbstadjungiert, falls $T = T^*$.
(c) T heißt maximal symmetrisch, falls T symmetrisch ist und für S symmetrisch mit $T \subseteq S$ gilt: $T = S$.

30.1. Für solche Operatoren (selbstadjungierte oder auch nur symmetrische) erhoffen wir uns eine schöne Theorie, analog zum Fall in $\mathcal{B}(H)$.

11.8 Bemerkung: (a) Für symmetrische Operatoren gilt

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x,y \in D(T)$$

(b) Selbstadjungierte Operatoren sind abgeschlossen nach 11.4(c). Symmetrische hingegen nicht immer. Sie sind jedoch immer abschließbar ($\overline{G(T)} \subseteq G(T^*)$ nach $T \subseteq T^*$ und 11.4(c)).

(c) Selbstadjungierte Operatoren sind maximal symmetrisch.
($T = T^*$, $S \subseteq S^*$, $T \subseteq S$ $\Rightarrow$ $S^* \subseteq T^* = T \subseteq S \subseteq S^* \Rightarrow S = T$)
Die Umkehrung ist nicht wahr.

Können wir für unbeschränkte Operatoren ein Spektrum definieren?

11.9 Definition: Sei T ein Operator auf H.

$\operatorname{Res} T := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T : D(T) \to H \text{ invertierbar}\}$ „Resolventenmenge"

$\operatorname{Sp} T := \mathbb{C} \setminus \operatorname{Res} T$ „Spektrum von T"

11.10 Lemma: Sei T symmetrisch. Dann gilt:

(a) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2$ und $\|Tx - ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \quad \forall x \in D(T)$

(b) T abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Bild$(T+i)$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Bild$(T-i)$ abgeschlossen
Ist T abgeschlossen, so gilt sogar Bild$(\lambda - T)$ abgeschlossen $\forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

(c) $T+i$ und $T-i$ sind injektiv. Ist T abgeschlossen, so ist sogar $\lambda - T$ injektiv $\forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

(d) Bild$(T+i) = H$ oder Bild$(T-i) = H$ $\Rightarrow$ T maximal symmetrisch

Beweis: (a) $$\|Tx+ix\|^2 = \underbrace{\langle Tx, Tx\rangle}_{=\|Tx\|^2} + \underbrace{\langle Tx, ix\rangle}_{-i\langle Tx,x\rangle} + \underbrace{\langle ix, Tx\rangle}_{=i\langle Tx,x\rangle} + \underbrace{\langle ix, ix\rangle}_{=\|x\|^2}$$

(b) Die Abbildung $G(T) \to \text{Bild}(T+i)$, $(x,Tx) \mapsto (T+i)x$ ist surjektiv und isometrisch, denn
$\|(x,Tx)\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \overset{(a)}{=} \|(T+i)x\|^2$. Also $G(T)$ abgeschl. $\Leftrightarrow$ Bild$(T+i)$ abgeschl.

($\alpha : K \subseteq H_1 \to L \subseteq H_2$ isometrisch & surj., dann K abgeschl. $\Leftrightarrow$ L abgeschl.:

„$\Leftarrow$": $(x_n) \subseteq K$, $x_n \to x \Rightarrow \underset{\in L}{\alpha(x_n)} \to \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) \in L$, d.h. $x = \alpha^{-1}\alpha(x) \in K$

„$\Rightarrow$" $(y_n) \subseteq L$, $y_n \to y \Rightarrow (x_n) \subseteq K$ $\exists$ $\alpha(x_n) = y_n$ ist Cauchy (da α isom.) $\Rightarrow x_n \to x \in K$
d.h. $y_n = \alpha(x_n) \to \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = y$, $y \in L$)

zu (b)&(c): Sei T abgeschlossen und symmetrisch, $\lambda = a+ib \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Sei $x \in D(T)$. Dann
$$\begin{aligned}\|(\lambda-T)x\|^2 &= |\lambda|^2\|x\|^2 - \lambda\langle x,Tx\rangle - \bar\lambda\langle Tx,x\rangle + \|Tx\|^2 \\ &= (a^2+b^2)\|x\|^2 - 2a\langle x,Tx\rangle + \|Tx\|^2 \\ &= b^2\|x\|^2 + \|(a-T)x\|^2 \geq b^2\|x\|^2\end{aligned}$$

Also $(\lambda-T)x = 0 \Rightarrow x=0$, d.h. $\lambda-T$ injektiv

und $(\lambda-T)x_n \to y \Rightarrow ((\lambda-T)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ Cauchy $\Rightarrow x_n \to x$

für ein $x \in D(T)$ mit $(\lambda-T)x_n \to (\lambda-T)x \Rightarrow y \in \mathrm{Bild}(\lambda-T)$, also abgeschl.

zu (c): $(T+i)x = 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} x=0$.

(d) $T \subsetneq S$, dann $T+i \subsetneq S+i$, d.h. $S+i$ nicht injektiv $\overset{(c)}{\Rightarrow}$ S nicht symmetrisch. □

11.10b Proposition: Sei T abgeschlossen und symmetrisch. Dann sind äquivalent:

(i) T ist selbstadjungiert

(ii) i und $-i$ sind keine Eigenwerte von T^*, d.h. $\ker(T^*-i) = \ker(T^*+i) = \{0\}$

(iii) $\mathrm{Bild}(T+i) = \mathrm{Bild}(T-i) = H$.

Beweis: (i)⇒(ii): Sei $(T^*-\lambda)x = 0$ für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (z.B. $\lambda = i$ oder $\lambda = -i$).

Dann $\lambda\langle x,x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \langle T^*x,x\rangle = \langle x,Tx\rangle = \langle x,\lambda x\rangle = \bar\lambda\langle x,x\rangle$

Da $\lambda \neq \bar\lambda$ ist also $\langle x,x\rangle = 0$, d.h. $x=0$.

(ii)⇔(iii): $\ker(T^*+i) = \{0\} \overset{11.4}{\Leftrightarrow} \mathrm{Bild}(T-i)^\perp = 0 \overset{11.10}{\Leftrightarrow} \mathrm{Bild}(T-i) = H$

(iii)⇒(i): Es gilt $T \subseteq T^*$, bzw. $D(T^*) \subseteq D(T)$ (dann auch $T^* \subseteq T$).

Sei $x \in D(T^*)$. Da $\mathrm{Bild}(T-i) = H$, ex. $y \in D(T) = D(T-i)$ mit $(T-i)y = (T^*-i)x$. Da $y \in D(T) \subseteq D(T^*) = D(T^*-i)$, ist $(T^*-i)y = (T^*-i)x$.

Da T^*-i injektiv, also $x = y \in D(T)$. □

11.11 Lemma: Ist T abgeschlossen, so ist $(\lambda-T)^{-1}\in\mathcal{L}(H)$ $\forall \lambda\in \operatorname{Res} T$, $\operatorname{Sp}T\subseteq\mathbb{C}$ abgeschl.

Beweis: $\lambda - T$ ist abgeschlossen, denn für $x_n\to x$, $(\lambda-T)x_n\to y$ für $(x_n)\subseteq D(\lambda-T)$ ist $(x_n)\subseteq D(T)$ und da T abgeschlossen ist: $x\in D(T)$, d.h. $x\in D(\lambda-T)$.

Und $y \leftarrow (\lambda-T)x_n = \lambda x_n - Tx_n \to \lambda x - Tx = (\lambda-T)x$, dann 11.3(a).

Somit ist $G(\lambda-T)$ abgeschlossen und $G((\lambda-T)^{-1}) = \{(y,x) \mid (x,y)\in G(\lambda-T)\}$ ebenfalls, d.h. $(\lambda-T)^{-1}$ ist abgeschlossen.

Außerdem $D((\lambda-T)^{-1})=H$, denn für $\lambda\in\operatorname{Res}T$ ist $(\lambda-T): D(T)\to H$ invertierbar, d.h. $(\lambda-T)^{-1}: H\to D(T)$ beschr. (4.16). Bez. $\operatorname{Res} T$ offen.

Sei dazu $\lambda\in \operatorname{Res}T$ und $\mu\in\mathbb{C}$ mit $|\lambda-\mu| < \frac{1}{\|(\lambda-T)^{-1}\|}$.

Dann $\mu - T = \underbrace{\big((\mu-\lambda)\underbrace{(\lambda-T)^{-1}}_{\in\mathcal{L}(H)}+1\big)}_{\text{invertierbar auf } H \text{ nach } 7.7}\underbrace{(\lambda-T)}_{\text{invertierbar auf } D(T)}$ invertierbar auf $D(T)$ $\quad(\|1-[(\mu-\lambda)(\lambda-T)^{-1}+1]\|<1)$

$\Rightarrow \mu\in\operatorname{Res}T$, also $B\left(\lambda, \frac{1}{\|(\lambda-T)^{-1}\|}\right)\subseteq \operatorname{Res}T$. □

11.12 Bemerkung: Aber $\operatorname{Sp} T$ i.A. nicht kompakt, z.B. $\operatorname{Sp}(Q)=\mathbb{R}$ für Q wie in 11.6.

11.13 Proposition: (a) Ist T selbstadjungiert, so ist $\operatorname{Sp}T\subseteq\mathbb{R}$.

(b) Ist T abgeschlossen und symmetrisch und $\operatorname{Sp}T\subseteq\mathbb R$, so ist T selbstadjungiert.

Beweis: (a) Sei $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Da $T=T^*$, ist T abgeschlossen (11.4(c)).

Nach 11.10 also $\lambda-T$, $\bar\lambda-T$ injektiv und $\operatorname{Bild}(\lambda-T)$ abgeschlossen.

$\Rightarrow \operatorname{Bild}(\lambda-T)^\perp \overset{11.4}{=} \operatorname{Kern}(\bar\lambda-T)=\{0\}$, d.h. $\operatorname{Bild}(\lambda-T)=\overline{\operatorname{Bild}(\lambda-T)}=H$

$\Rightarrow \lambda-T$ inj. und surj., d.h. $\lambda\notin\operatorname{Sp} T$.

(b) $\operatorname{Sp}T\subseteq\mathbb R \Rightarrow \pm i\notin \operatorname{Sp}T$, d.h. $\operatorname{Bild}(T\pm i)=H \overset{11.10b}{\Longrightarrow} T=T^*$. □

11.14 Bemerkung: Sei T abgeschlossen und symmetrisch und nicht selbstadjungiert.
Also $\operatorname{Sp}T\not\subseteq\mathbb R$ und $i\in \operatorname{Sp}T$ oder $-i\in \operatorname{Sp}T$ (siehe Beweis von 11.13(b)).
Man kann dann sogar zeigen, dass $\operatorname{Kern}(\lambda-T^*)$ konstante Dimension für $\lambda\in\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb C\mid \operatorname{Im}(z)>0\}$ hat, ebenso auf $\mathbb C_-$.
Es gilt also genauer:
$i\in \operatorname{Sp}T \Rightarrow \mathbb C_+\subseteq \operatorname{Sp}T$
$-i\in \operatorname{Sp}T\Rightarrow \mathbb C_-\subseteq \operatorname{Sp}T$.

Also gibt es für T abgeschlossen und symmetrisch nur 4 Möglichkeiten:

(1) $\operatorname{Sp} T = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ ($\operatorname{Sp} T$ abgeschlossen) $(i \in \operatorname{Sp}T,\ -i \notin \operatorname{Sp}T)$

(2) $\operatorname{Sp} T = \mathbb{C}_- \cup \mathbb{R}$ $(i \notin \operatorname{Sp}T,\ -i \in \operatorname{Sp}T)$

(3) $\operatorname{Sp} T = \mathbb{C}$ $(i \in \operatorname{Sp}T,\ -i \in \operatorname{Sp}T)$

(4) $\operatorname{Sp} T \subseteq \mathbb{R}$ (dann $T = T^*$) $(i \notin \operatorname{Sp}T,\ -i \notin \operatorname{Sp}T)$

Ob T selbstadjungiert ist, hängt somit vom Verhalten von $T \pm i$ ab.
In jedem Fall ist $T \pm i$ injektiv (11.10) und $\operatorname{Bild}(T \pm i)$ abgeschlossen.
Die Frage ist also: $\operatorname{Bild}(T \pm i) = H$? (für $\pm i \in \operatorname{Sp}T$?)

11.15 **Definition**: Sei T abgeschlossen und symmetrisch,

$n_+(T) := \dim(\operatorname{Bild}(T+i)^\perp) \in \{0,1,2,\dots,\infty\}$

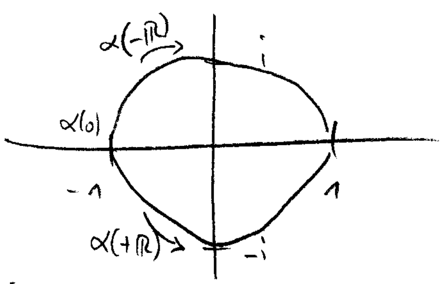
$n_-(T) := \dim(\operatorname{Bild}(T-i)^\perp) \in \{0,1,2,\dots,\infty\}$ „Defektindizes"

11.16 **Korollar**: T abgeschlossen, symmetrisch. Dann ist T selbstadjungiert genau dann, wenn $n_+(T) = n_-(T) = 0$

Beweis: 11.10b. □

Mit Hilfe der Defektindizes kann man auch bestimmen, wann ein Operator eine selbstadjungierte Erweiterung besitzt ($T \subseteq S = S^* \subseteq T^*$), bzw. wann er wesentlich symmetrisch ist. Für selbstadjungierte, unbeschränkte Operatoren haben wir auch einen Spektralsatz. Hilfsmittel ist in solchen Fällen die Cayley-Transformierte. Die Idee hierbei ist: Für beschränkte Operatoren besitzen wir einen Spektralsatz, für unbeschränkte hingegen nicht. Ist nun jedoch $\operatorname{Sp}T \subseteq \mathbb{R}$ für einen unbeschränkten Operator, so „machen wir $\mathbb{R}$ kompakt", indem wir $\mathbb{R}$ auf $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ abbilden:

$$\alpha : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{1\} \text{ bijektiv}, \quad t \mapsto \frac{t-i}{t+i}$$



mit Umkehrabb. $$\beta : S^1 \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto i\,\frac{1+z}{1-z}$$

$\left(\left|\frac{t-i}{t+i}\right| = \left|\frac{\overline{t+i}}{t+i}\right| = 1,\ \alpha(0) = -1,\ \alpha(1) = -i,\ \alpha(-1) = i \right)$

11.17 Definition: Sei T abgeschlossen und symmetrisch. $D(U) := \text{Bild}(T+i)$.
Dann heißt $U := (T-i)(T+i)^{-1} : \text{Bild}(T+i) \to \text{Bild}(T-i)$
die Cayley-Transformierte von T.

11.18 Bemerkung: (a) Nach 11.10 ist $\text{Bild}(T+i)$, $\text{Bild}(T-i)$ abgeschlossen und $T+i$, $T-i$ sind injektiv (auf $D(T)$). Somit ist U wohldefiniert.

(b) Ist T selbstadjungiert, so ist $U \in \mathcal{L}(H)$ nach 11.10b und 11.11.

11.19 Satz: Sei T abgeschlossen und symmetrisch und U seine Cayley-Transformierte.

(a) U ist eine Isometrie und U ist abgeschlossen

(b) $\text{Bild}(1-U) = D(T)$ und $1-U : D(U) \to D(T)$ ist injektiv.
Es gilt $T = i(1+U)(1-U)^{-1}$

(c) U ist unitär $\Leftrightarrow$ T ist selbstadjungiert

Beweis: (a) Sei $y = (T+i)x \in \text{Bild}(T+i)$, $x \in D(T)$. Dann $Uy = (T-i)x$.
Also $\|Uy\|^2 = \|Tx - ix\|^2 \overset{11.10}{=} \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \overset{11.10}{=} \|Tx + ix\|^2 = \|y\|^2$
Da $\text{Bild}(T-i) = \text{Bild}\, U$ abgeschlossen ist, ist U abgeschlossen.

(b) Sei $y = (T+i)x \in D(U) = \text{Bild}(T+i)$, $x \in D(T)$.
Dann $(1-U)y = (T+i)x - (T-i)x = 2ix \in D(T)$. Also $\text{Bild}(1-U) = D(T)$ sowie $(1-U)$ injektiv ($(1-U)y = 0 \Rightarrow 2ix = 0$, d.h. $x = 0$ und also $y = 0$).
Analog ist $(1+U)((T+i)x) = 2Tx$, d.h. für $x \in D(T)$ ist

$$i(1+U)(1-U)^{-1}\left(\tfrac{2i}{2i}x\right) = i(1+U)(1-U)^{-1}\left(\tfrac{1}{2i}(1-U)(T+i)x\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(1+U)(T+i)x = \tfrac{1}{2}(2Tx) = Tx.$$

(c) T selbstadjungiert $\overset{11.10b}{\Longrightarrow}$ $D(U) = \text{Bild}(T+i) = H$ und $\text{Bild}\, U = \text{Bild}(T-i) = H$.
Also ist U isometrisch und surjektiv, nach 6.8 und 5.32 also unitär.
Ist umgekehrt U unitär, so ist $\text{Bild}(T+i) = D(U) = H$ und $\text{Bild}(T-i) = H$, 11.10b.
$\square$

11.20 Bemerkung: Sei V ein abgeschlossener, isometrischer Operator auf H, so dass $1-V$ injektiv ist. Dann ist V die Cayleytransformierte eines abgeschlossenen, symmetrischen Operators. (Definition wie in 11.19(b))

11.21 Satz: Sei T abgeschlossen und symmetrisch. Dann gilt

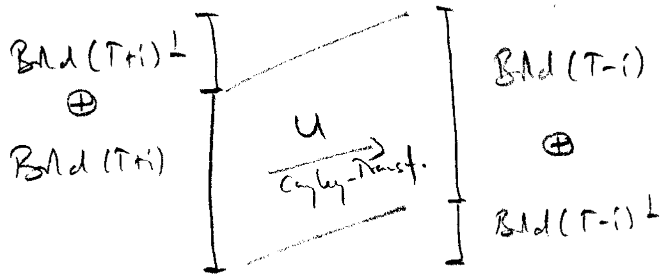
(a) T selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ $n_+ = n_- = 0$

(b) T maximal symmetrisch $\Leftrightarrow$ $n_+ = 0$ oder $n_- = 0$

(c) T besitzt eine selbstadjungierte Erweiterung $\Leftrightarrow$ $n_+ = n_-$

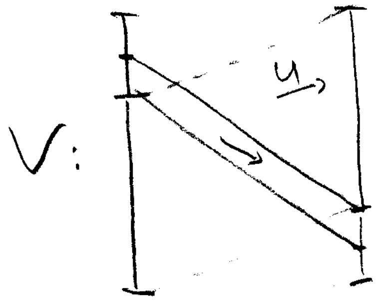
Beweis: (a) 11.16

(b) & (c):



Sei S abgeschlossen und symmetrisch, $T \subseteq S$ und V die Cayleytransf. von S. Dann gilt nach Definition $U \subseteq V$.

Also



(V ist isometrisch auf einem Teil von Bild$(T+i)^\perp$ und Bild$(T-i)^\perp$, ansonsten ebenso wie U)

Ist nun $n_+ = 0$ oder $n_- = 0$, so ist keine solche Erweiterung V von U möglich, d.h. T ist schon maximal symmetrisch.
Ist andernfalls $n_+ = n_-$, so ist eine Erweiterung V von U möglich und nach 11.20 folgt somit dann eine Erweiterung von T. $\square$

11.22 Beispiel: Der Impulsoperator $(Tf)(t) := i f'(t)$ auf $L^2(0,1)$ ist symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert. Mit 11.21 ist jedoch eine selbstadjungierte Erweiterung möglich.

11.23 Satz (Spektralsatz für selbstadjungierte unbeschränkte Operatoren):

Sei T selbstadjungiert und U seine Cayleytransformierte (also $U \in \mathcal{L}(H)$ unitär). Dann ist $\operatorname{Sp} U \subseteq S^1$ (Blatt 11) und $E: \{\text{Borelmengen in } \operatorname{Sp} U\} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ das zu U gehörige Spektralmaß nach 10.8 (beachte $U^*U = UU^* = 1$, also U normal).

Dann definiert $F: \{\text{Borelmengen in } \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ ein Spektralmaß,
$A \longmapsto E(\beta^{-1}(A))$

wobei $\beta: S^1 \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $z \longmapsto i\,\frac{1+z}{1-z}$ wie auf Seite 11-8 (siehe auch 11.9(b)).

Dieses Spektralmaß ist auf $\operatorname{Sp} T$ konzentriert ($A \cap \operatorname{Sp} T = \emptyset \Rightarrow F(A) = 0$).

Das Spektralmaß F definiert durch $S = \int_{\mathbb{R}} t \, dF_t$ einen Operator mit $D(S) = \{x \in H \mid \int t^2 d\mu_x(t) < \infty\}$ (vgl. Bemerkung 11.5).

Es gilt dann $S = T$, d.h. T ist in diesem Sinne diagonalisierbar.