Funktionalanalysis, Saarbrücken, WiSe 2013/2014

Vorwort

Analysis: Untersuche Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (oder $f: X \to Y$)
Frage nach „Transformationen" von Funktionen, also Abbildungen

$$T: \{f: A \to B\} \to \{f: A \to B\}$$

1.) Welche Struktur haben die Räume $\{f: A \to B\}$?
z.B.: $\mathcal{C}[0,1] = \{f: [0,1] \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$
Dies ist ein Vektorraum per $f+g$, λf, außerdem normiert per $\|\cdot\|_\infty$ und vollständig.
Verstehe also topologische Konzepte (hier etwa: Konvergenzbegriffe von Funktionenfolgen) auf VRen und Verallgemeinerungen von $\{f: A \to B\}$
⇝ Banachräume, Hilberträume

2.) Im Setting $T: X \to Y$ mit VRn X, Y (plus Zusatzstruktur) sind besonders lineare Abbildungen T interessant, ein Konzept, das wir schon aus der Linearen Algebra kennen.
Bsp: $(Tf)(s) := \int_Z k(s,t) f(t)\, d\mu(t)$, mit günstigem $k: Z \times Z \to \mathbb{C}$.
In diesem Sinne untersuchen wir „unendlich große Matrizen" – nämlich, wenn X und Y unendl. dim. VRe sind.
Was sind dann „Eigenwerte", was ist „Diagonalisieren"?
Ist $\dim < \infty$, so ist T linear $\Rightarrow T$ stetig, also Lineare Algebra.
Ist $\dim = \infty$, so ist T linear $\not\Rightarrow T$ stetig, also hier
Lineare Algebra + Analysis (= Funktionalanalysis, in gewissem Sinne)
⇝ Operatoren auf Hilberträumen (s. auch Seminar Do 14-16, SR10)

3.) Bei Matrizen gilt $AB \neq BA$. Dieses Konzept der „Nichtkommutativität" ist grundlegend für Operatoren auf Hilberträumen und ist z.B. in der Quantenmechanik das richtige Modell. Weiterhin ist es sinnvoll $\{T: X \to Y\}$ zu untersuchen, will man Operatoren T verstehen. Der Raum $\{T: X \to Y\}$ ist wieder ein VR mit Norm, der auch vollständig ist (nehmen wir mal $X = Y =$ Hilbertraum an) und sogar eine algebraische Struktur hat, per $A \cdot B := A \circ B$ (Komposition). Dies führt uns zu „operatoralgebraischen" Strukturen, die für gewöhnlich nichtkommutativ sind.
$\rightsquigarrow$ Banachalgebren, C^*-Algebren, Von-Neumann-Algebren

Geschichte:

Fredholm (~1900)	Integraloperatoren
Hilbert (~1910)	Spektraltheorie allgemeiner beschränkter Operatoren
Riesz (~1910/20)	Lin. Abb. auf allgem. normierten Räumen
Banach (~1920/30)	„Begründer der modernen Funkt.anal."
von Neumann (~1930/40)	Begründer der Quantenmechanik Von-Neumann-Algebren
Gelfand (~1943)	C^*-Algebren

Literatur:

Conway
Hirzebruch-Scharlau
Meise-Vogt
Pedersen