K-Theorie von C^*-Algebren

WiSe 2019/2020

Einleitung

- „Die K-Theorie hat das Studium von Operatoralgebren revolutioniert" (Blackadar, K-Th. for Op. Alg., Vorwort)
- Geschichte:
  - topol. K-Theorie (Atiyah-Hirzebruch 1960er)
  - K-Th. für C^*-Alg. (1970er)
  - K-Homologie, Ext-Th. (Brown-Douglas-Fillmore)
  - KK-Th. (Kasparov 1980er): verbindet die obigen
  - E-Theorie (Connes-Higson 1990er), equivar. K-Theorie, ...
- Idee: $\{C^*\text{-Algebren}\} \xrightarrow{K_0, K_1} \{\text{abelsche Gruppen}\}$

  $A \cong B \Rightarrow K_i(A) \cong K_i(B)$, $i = 0,1$ Invariante

  K_0: „zählt Projektionen"

  K_1: „zählt Unitäre"
- wichtige Resultate zur K-Th. als Invariantentheorie (allg.: $\mathrm{Ell} = (K_0, K_1, \underbrace{\ldots}_{\text{je Resultat zu spezifizieren}}))$
  - Elliott 1970er: A, B AF-Algebren (q.B. endl.dim.).

    $A \cong B \Leftarrow \mathrm{Ell}(A) \cong \mathrm{Ell}(B)$
  - Kirchberg 1990er, Phillips 2000: A, B Kirchberg algebren

    $A \cong B \Leftarrow \mathrm{Ell}(A) \cong \mathrm{Ell}(B)$
  - Tikuisis, White, Winter 2017: A, B separabel, unital, einfach, unendl.dim., mit endl. nuklearer Dimension, UCT.

    $A \cong B \Leftarrow \mathrm{Ell}(A) \cong \mathrm{Ell}(B)$
  - Eilers, Restorff, Ruiz, Sørensen 2016: A, B Graph-C^*-Algebren.

    $A \cong B \Leftarrow \mathrm{Ell}(A) \cong \mathrm{Ell}(B)$

∘ wichtige Eigenschaften von K_0 und K_1:

- Funktorialität: $\varphi: A \to B$ $*$-Hom. $\Rightarrow$ $\varphi_*: K_i A \to K_i B$ Gruppenhom.
  mit $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$, $(id)_* = id$
- Homotopieinvarianz: $\varphi, \psi: A \to B$ $*$-Hom., $\varphi \sim_{\text{homotop}} \psi \Rightarrow \varphi_* = \psi_*$
  $A \sim_h B \Rightarrow K_i A = K_i B$
- Stabilität: $K_i(M_n(A)) = K_i(A)$, $K_i(A \otimes \mathcal{K}(H)) = K_i(A)$, H sep.
- Bottperiodizität: kann $K_n(A)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren, habe
  dann $K_{n+2}(A) = K_n(A)$ $\rightsquigarrow$ nur K_0, K_1 relevant
- Ausschneidung: $0 \to I \to A \xrightarrow{\varphi} B \to 0$ exakt
  $(\Leftrightarrow I \trianglelefteq A$ Ideal & $B \cong A/I)$

$\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} K_0 I \arrow[r] & K_0 A \arrow[r] & K_0 B \arrow[d] \\ K_1 B \arrow[u] & K_1 A \arrow[l] & K_1 I \arrow[l] \end{tikzcd}$$
6-term exakte Sequenz

Aufspalten: $\exists \psi: B \to A$ mit $\varphi \circ \psi = id_B$ (d.h. $0 \to I \to A \rightleftarrows B \to 0$ splitexakt)

$\Rightarrow K_i A = K_i I \oplus K_i B$
(d.h. $0 \to K_i I \to K_i A \to K_i B \to 0$ exakt)

- Korrespondenz: $K_n(C_0(X)) \cong K^n(X)$ topol. K-Th. von Atiyah-Hirzebruch
- Normierung: $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{C}) = 0$

∘ Cuntz 84, Higson 83, Rosenberg 82: „Sei H ein Funktor mit obigen (i.W.) Eigenschaften, so ist $H = (K_0, K_1)$."

∘ Ziele: (1) Obige Eigenschaften nachweisen
(2) Allein auf Grundlage der Eigenschaften K-Gruppen berechnen
(3) Einige Bemerkungen zu verwandten Aussagen