§1 Äquivalenzrelationen auf Unitären

1.1 Def.: Sei G eine topol. Gruppe, $g_0, g_1 \in G$.

$g_0 \sim_h g_1$ (homotop) $:\Longleftrightarrow \exists\, \gamma : [0,1] \to G$ stetig mit $\gamma(0) = g_0$, $\gamma(1) = g_1$

Setze $G_0 := \{ g \in G \mid g \sim_h e \}$ (wegweise) Zusammenhangskomponente des neutralen Elements

1.2 Lemma: $\sim_h$ ist eine Äquivalenzrelation, $G_0 \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

Beweis: $G_0 \subseteq G$ Untergruppe: $g \sim_h e$ per $(\gamma_t)_{t\in[0,1]} \Rightarrow g^{-1} \sim_h e$ per $(\gamma_t^{-1})_{t\in[0,1]}$

$g_1 \sim_h e,\ g_2 \sim_h e$ per $(\gamma_t^1), (\gamma_t^2) \Rightarrow g_1 g_2 \sim_h e$ per $(\gamma_t^1 \gamma_t^2)$ □

1.3 Def.: Sei A eine unitale C^*-Algebra.

Setze $U(A) := \{ u \in A$ unitär (d.h. $u^*u = uu^* = 1$)$\}$ (topol. Gruppe in Normtopol.)

$U_0(A) := \{ u \in U(A) \mid u \sim_h 1 \}$

1.4 Lemma: A unitale C^*-Algebra, $u \in U(A)$.

(a) $\mathrm{Sp}\, u \subsetneq S^1$ (z.B. $\|1-u\| < 2$) $\Rightarrow \exists\, h = h^* \in A : u = e^{ih} \in U_0(A)$

(b) $U_0(A) = \{ e^{ih_1} \cdots e^{ih_n} \mid h_i \in A$ selbstadj., $n \in \mathbb{N} \}$

(c) $\sigma : A \to B$ surj. unitaler $*$-Hom., B unital $\Rightarrow \sigma(U_0(A)) = U_0(B)$

Beweis: (a) $\|1 - u\| < 2 \Rightarrow \|1 - \mathrm{id}_{\mathrm{Sp}\,u}\|_\infty < 2 \Rightarrow -1 \notin \mathrm{Sp}\, u$.

Sei nun $\mathrm{Sp}\, u \subsetneq S^1$. Dann ist $e^{i\cdot} : [0, 2\pi) \setminus \{x\} \to S^1 \setminus \{y\}$ invertierbar für ein $x \in [0, 2\pi)$ und $y \in S^1 \setminus \mathrm{Sp}\, u$ mit stetiger, reellwertiger Umkehrfunktion arg. Nach dem f.kalkül ist also $h := \arg(u) \in A$ wohldefiniert und selbstadjungiert mit $e^{ih} = e^{i\arg(u)} = u$. Mit $\gamma_t := e^{ith}$ ist $u \sim_h 1$.

(b) „$\supseteq$" $\gamma_t := e^{ith_1} \cdots e^{ith_n}$ liefert $e^{ih_1} \cdots e^{ih_n} \sim_h 1$.

„$\subseteq$" Sei $u \sim_h 1$ per $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$. Nach der Stetigkeit $t \mapsto \gamma_t$ ex. Partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ mit $\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| < 2$.

Also $u = \gamma(1) = \underbrace{\gamma(t_n)\gamma(t_{n-1})^{-1}}_{= e^{ih_n}} \underbrace{\gamma(t_{n-1})\gamma(t_{n-2})^{-1}}_{= e^{ih_{n-1}}} \underbrace{\gamma(t_{n-2}) \ldots}_{} \underbrace{\gamma(t_1)\gamma(t_0)^{-1}}_{= e^{ih_1}} \underbrace{\gamma(t_0)}_{= 1}$

$\Big(\|\gamma(t_i)\gamma(t_{i-1})^{-1} - 1\| = \|(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))\gamma(t_{i-1})^{-1}\| < 2$, dann (a)

(denn $\|w\| = 1\ \forall w$ unitär) $\Big)$

(c) „$\subseteq$" $\sigma(e^{ih_1} \cdots e^{ih_n}) = e^{i\sigma(h_1)} \cdots e^{i\sigma(h_n)} \in U_0(B)$

„$\supseteq$" Sei $w = e^{ih_1} \cdots e^{ih_n} \in U_0(B)$. Da σ surj., ex. $h_i' \in A$ mit $\sigma(h_i') = h_i$. Problem: $h_i' \neq h_i'^*$ i.A.

Setze $g_i := \operatorname{Re} h_i' = \frac{h_i' + h_i'^*}{2} = g_i^*$, $\sigma(g_i) = h_i$, $\sigma(\underbrace{e^{ig_1} \cdots e^{ig_n}}_{\in U_0(A)}) = w$ □

15.10.

1.5 Lemma: (a) $U_0(M_n(\mathbb{C})) = U(M_n(\mathbb{C}))$, d.h. $u \sim_h 1$ $\forall u \in U(M_n(\mathbb{C}))$

(b) A unital, Dann $U_0(A) \subseteq U(A)$ normale Untergruppe

(c) $u, v \in U(A)$, $\|u - v\| < 2 \Rightarrow u \sim_h v$

(d) $U_0(A) \subseteq U(A)$ offen und abgeschlossen

Beweis: (a) $u \in U(M_n(\mathbb{C})) \Rightarrow \operatorname{Sp} u$ endlich $\Rightarrow \operatorname{Sp} u \subsetneq S^1$, dann L1.4(a).

(b) $u \in U_0(A)$, per (γ_t); $v \in U(A)$. Dann $v u v^* \sim_h 1$ per $(v \gamma_t v^*)$

(c) $\|1 - u^* v\| = \|u^*(u - v)\| < 2 \overset{1.4(a)}{\Longrightarrow} u^* v \sim_h 1$

$\Rightarrow v = u(u^* v) \sim_h u$

(d) offen: $u \in U_0(A)$, $v \in U(A)$, $\|u - v\| < 2 \overset{(c)}{\Longrightarrow} v \sim_h u \sim_h 1$

abgeschl.: $(u_n) \subseteq U_0(A)$, $u_n \to u \in U(A) \Rightarrow \exists N: \|u_N - u\| < 2$

$\overset{(c)}{\Longrightarrow} u \sim_h u_N \sim_h 1$ □

1.6 Lemma: A unital, $u, v \in U(A)$. Dann

$$\begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & \\ & u \end{pmatrix} \text{ in } U(M_2(A)),$$

insbes. $\begin{pmatrix} u & \\ & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis: $\gamma_t := \begin{pmatrix} \cos(t\frac{\pi}{2}) & \sin(t\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(t\frac{\pi}{2}) & \cos(t\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \in U(M_2(A))$, $t \in [0,1]$

$\left(\text{denn } \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 + s^2 & 0 \\ 0 & s^2 + c^2 \end{pmatrix} \right)$

Also $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \gamma_1 \sim_h \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.

Außerdem $\begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} -u & \\ & -v \end{pmatrix}$ per $\tilde{\gamma}_t := e^{it\pi} \begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} -u & \\ & -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & \\ & 1 \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} -u & \\ & -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & \\ & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & \\ & u \end{pmatrix}$

□