§2 Äquivalenzrelationen auf Projektionen

2.1 Def: A C^*-Algebra, $p,q \in A$ Projektionen ($p=p^*=p^2$).

(a) $p \sim q$ (Murray-von-Neumann äquivalent) $:\Longleftrightarrow \exists v \in A: v^*v=p,\ vv^*=q$

oder $p \sim_{MvN} q$

(b) $p \sim_u q$ (unitär äquivalent) $:\Longleftrightarrow \exists u \in \mathcal{U}(A): upu^*=q$

(c) $p \sim_{u_0} q$ $:\Longleftrightarrow \exists u \in \mathcal{U}_0(A): upu^*=q$

(d) $p \sim_h q$ (homotop) $:\Longleftrightarrow \exists \gamma:[0,1]\to A$, $\gamma(t)$ Proj. $\forall t$, $t \mapsto \gamma(t)$ stetig, $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$

2.2 Bemerkung: $v\in A$ ist eine partielle Isometrie (d.h. $v=vv^*v$) genau dann, wenn v^*v (oder vv^*) eine Projektion ist.

$$\Big(v=vv^*v \Rightarrow v^*\underline{vv^*v} = v^*v,$$
$$v^*v \text{ Proj.} \Rightarrow \|v-vv^*v\|^2 = \|\underbrace{(v-vv^*v)^*(v-vv^*v)}_{v^*v-2v^*vv^*v+v^*vv^*vv^*v}\| = 0\Big)$$

Ist $v \in \mathcal{L}(H)$ eine partielle Isometrie, so ist $v:(v^*v)H \to (vv^*)H$ isometrisch.

2.3

2.4 Lemma: $\sim, \sim_u, \sim_{u_0}, \sim_h$ sind Äquivalenzrelationen.

Beweis: $p=v^*v \sim vv^*=q=w^*w \sim ww^*=r$, $z:=wv$

$$\Rightarrow p = v^*(vv^*)v = v^*(w^*w)v = z^*z \sim zz^* = w\underbrace{vv^*}_{w^*w}w^* = r$$ $\square$

2.5 Lemma: A unital, $p,q\in A$ Proj., $\|p-q\|<1$. Dann $p\sim_{u_0} q$.

Bew: Setze $x:=2p-1$, $y:=2q-1$.

Dann $x=x^*$, $y=y^*$, $x^2=y^2=1$, d.h. x,y Symmetrien, insbes. unitär

(Idee: )

Also auch $xy\in\mathcal{U}(A)$ und $\|1-xy\| = \|x(x-y)\| \le \|\underbrace{2(p-q)}_{x-y}\| < 2$

$\overset{1.4(a)}{\Longrightarrow} \exists h=h^*\in A$ mit $xy=e^{ih}$. Dann $yx=(xy)^*=e^{-ih}$.

Betrachte $\alpha: A\to A$, $a\mapsto xax\ (=xax^*)$. Da x unitär, ist α ein Isomorphismus.

Außerdem gilt $\arg(xy)=h$, $\arg(yx)=-h$, arg wie in L1.4(a)

Sowie $\alpha(xy)=x^2yx=yx$

2.3 Bsp: $\dim H=n$, $A=M_n(\mathbb{C})$. Dann $p\sim q \Leftrightarrow \dim p\mathbb{C}^n=\dim q\mathbb{C}^n$

$\Leftrightarrow \operatorname{rang} p = \operatorname{rang} q$.

Somit $\alpha(h) = \alpha(\arg(xy)) = \arg(\alpha(xy)) = \arg(yx) = -h$.

Setze $u := e^{-\frac{i}{2}h} \underset{L1.4(b)}{\in} U_0(A)$ (also „$u = \sqrt{yx}$")

Für $g(t) := e^{-i\frac{t}{2}}$ ist $\alpha(u) = \alpha(g(h)) = g(\alpha(h)) = g(-h) = e^{i\frac{h}{2}}$.

Daher $uxu^* = x(xux)u^* = x\alpha(u)u^* = x e^{i\frac{h}{2}} \cdot e^{i\frac{h}{2}} = xe^{ih} = xxy = y$.

Also $upu^* = u\left(\frac{x+1}{2}\right)u^* = \frac{uxu^*+1}{2} = \frac{y+1}{2} = q$. □

2.6 Proposition: (A unital) $p \sim_h q \Leftrightarrow p \sim_{u_0} q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$.

Beweis: $p\sim_h q \Rightarrow p \sim_{u_0} q$: Sei $p\sim_h q$ per $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$.

Nach der Stetigkeit von $t\mapsto p_t$ ex. Partition $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ mit $\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|<1 \overset{2.5}{\Longrightarrow} \exists u_i\in U_0(A)$ mit $u_i\gamma(t_{i-1})u_i^* = \gamma(t_i)$.

Mit $u := u_n\cdot\ldots\cdot u_1 \in U_0(A)$ also $upu^* = u_n \cdots \underbrace{u_1pu_1^*}_{\gamma(t_1)}\cdots u_n^* = \gamma(t_n) = q$.

$p\sim_{u_0} q \Rightarrow p\sim_h q$: Für $u\in U_0(A)$ mit $upu^*=q$ ex. $(\gamma_t)\subseteq U(A)$ mit $\gamma_0=u$, $\gamma_1=1$. Also $\tilde\gamma_t := \gamma_t p\gamma_t^*$ mit $\tilde\gamma_0=q$, $\tilde\gamma_1=p$.
Proj.

$p\sim_{u_0}q\Rightarrow p\sim_u q$: $U_0(A)\subseteq U(A)$

$p\sim_u q \Rightarrow p\sim q$: $upu^*=q$, $v:=up$. Dann $v^*v=p$, $vv^*=q$. □

2.7 Proposition: Betrachte $A \cong \begin{pmatrix} A & \\ & 0\end{pmatrix} \subseteq M_2(A)$ als C^*-Unteralgebra.

Für $p,q\in A$ Projektionen gilt: $p\sim_h q$ in $M_2(A)$ $\Leftrightarrow$ $p\sim q$ in A

Insbesondere sind alle Äquivalenzrel. von Def. 2.1 „bis auf $M_2(A)$" äquivalent.

Beweis: „$\Rightarrow$" Nach P2.6 ex. $u\in U_0(M_2(\tilde A))$ mit $upu^*=q$.

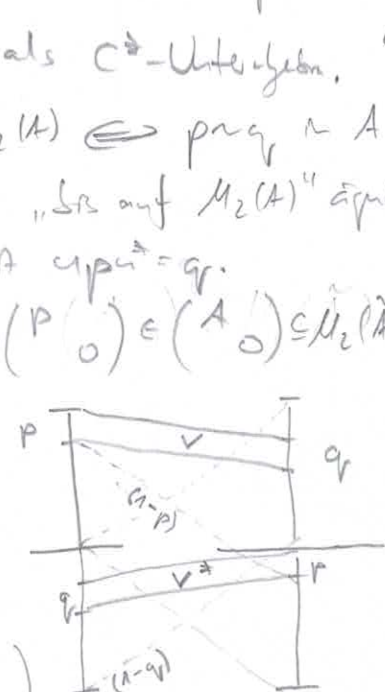
Setze $v := up = (upu^*)up = \begin{pmatrix} q & \\ & 0\end{pmatrix} u \begin{pmatrix} p & \\ & 0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A & \\ & 0\end{pmatrix} \subseteq M_2(\tilde A)$.

Dann $v^*v=p$, $vv^*=q$.

„$\Leftarrow$" Sei $v\in A$ mit $v^*v=p$, $vv^*=q$.

Setze $u := \begin{pmatrix} v & -(1-q) \\ 1-p & v^*\end{pmatrix}$

Dann ist u unitär:



$$uu^* = \begin{pmatrix} v & -(1-q)\\ (1-p) & v^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^* & (1-p) \\ -(1-q) & v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vv^*+(1-q) & 0 \\ 0 & (1-p)+v^*v\end{pmatrix}$$

(beachte $v(1-p) = vv^*v(1-p) = vp(1-p) = 0$)

Und $u \sim_h u\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ via $u\begin{pmatrix}\cos(t\frac{\pi}{2}) & \sin(t\frac{\pi}{2})\\ -\sin(t\frac{\pi}{2}) & \cos(t\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$

bzw. $\begin{pmatrix}(1-q)+\cos(t\frac{\pi}{2})q & \sin(t\frac{\pi}{2})v\\ -\sin(t\frac{\pi}{2})v^* & (1-p)+\cos(t\frac{\pi}{2})p\end{pmatrix}$

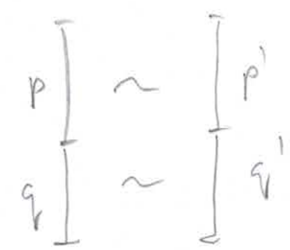
(Beachte $u\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v & -(1-q)\\ (1-p) & v^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-q) & v\\ -v^* & (1-p)\end{pmatrix}$)

Außerdem $u\begin{pmatrix}p & \\ & 0\end{pmatrix}u^* = \begin{pmatrix}v & -(1-q)\\ 1-p & v^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^* & 1-p\\ -(1-q) & v\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}vpv^* & \\ & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q & \\ & 0\end{pmatrix}.$$

Also $\begin{pmatrix}p & \\ & 0\end{pmatrix} \sim_{u_0} \begin{pmatrix}q & \\ & 0\end{pmatrix}$ in $M_2(A) \overset{2.6}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}p & \\ & 0\end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix}q & \\ & 0\end{pmatrix}$. □

2.8 Lemma: $p, q, p', q' \in A$ Proj., $p \perp q$, $p' \perp q'$ (d.h. $pq = 0$), $p \sim p'$, $q \sim q'$.
Dann auch $p + q \sim p' + q'$.



Beweis: Seien $v, w \in A$ mit
$v^*v = p$, $vv^* = p'$, $w^*w = q$, $ww^* = q'$.
Dann $w^*v = w^*\underbrace{ww^*}_{q'}\underbrace{vv^*}_{p'}v = 0 = wv^*$.
Also $(v+w)^*(v+w) = v^*v + w^*w = p + q$
und $(v+w)(v+w)^* = vv^* + ww^* = p' + q'$. □

11.10.