

§3 Definition von K_0

3.1 Def.: Für eine C^* -Algebra A betrachte $M_n(A) \subseteq M_{n+1}(A)$
 $x \mapsto (x_0)$

und setze $M_\infty(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(A) = \{ (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \mid a_{ij} \in A, a_{ij} = 0 \text{ nur endlich oft} \}$

3.2 Lemma: (a) Ist A eine C^* -Algebra, so ist auch $M_n(A) := \{ (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \mid a_{ij} \in A \}$ eine C^* -Algebra: Sei $\pi: A \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$ eine treue Darstellung von A .

Dann definiert $\pi^{(n)}: M_n(A) \rightarrow \mathcal{L}(H^n) \cong M_n(\mathcal{L}(H))$ eine treue Darstellung
 $(a_{ij}) \mapsto (\pi(a_{ij}))$

und $M_n(A)$ erhält eine C^* -Norm durch zurückziehen: $\| (a_{ij}) \| := \| \pi^{(n)}(a_{ij}) \|$.

Für diese Matrixnorm gilt $\max_{i,j} \| a_{ij} \| \leq \| (a_{ij}) \| \leq \sum_{i,j} \| a_{ij} \|$.

(b) Wir haben $M_n(A) \subseteq M_\infty(A)$ per $\{ (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > n \text{ oder } j > n \}$.
Also besitzt $M_\infty(A)$ eine C^* -Norm $\| x \| = \| x \|_{M_n(A)}$ für $x \in M_n(A) \subseteq M_\infty(A)$.
Ist $-A$ dieser jedoch nicht vollständig - $M_\infty(A)$ ist keine C^* -Algebra.

3.3 Def.: Für A C^* -Algebra setze $H(A) := \{ [p] \mid p \in M_\infty(A) \text{ Projektion} \}$
wobei $[-]$ Äquivalenzklasse bzgl. \sim .

3.4 Lemma: (a) $[-]$ ist auch Äquivalenzklasse bzgl. $\sim_{\frac{1}{2}}$. d.h.

(b) $H(A)$ ist eine abelsche Halbgruppe $[p] + [q] := [p' + q']$,

wobei $p, p', q, q' \in M_\infty(A)$ Projektionen, $p \sim p', q \sim q', p' \perp q'$.

Das neutrale Element ist $[0]$.

Beweis: (a) Setze $p, q \in M_\infty(A)$, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}: p, q \in M_n(A)$.

Dann $p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q$

und $p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q$

2.6 $p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q \iff p \sim q$

(b) $\exists p', q'$ für Addition: Zu $p, q \in M_\infty(A)$ setze $p' := (p_0), q' := (q_0)$

Add. hängt nicht von Wahl von p', q' ab:

Seien $p, p', p'', q, q', q'' \in M_\infty(A)$ Proj., $p \sim p', p' \perp p'', q \sim q', q' \perp q'', p' \perp q', p'' \perp q''$

$p' \perp q', p'' \perp q''$

2.8 $\implies p' + q' \sim p'' + q''$, d.h. $[p' + q'] = [p'' + q'']$

Assoz., Kommut., neutr. El. \checkmark

3.5 Def. H abelsche Halbgruppe, $\Delta := \{(x,x) \mid x \in H\}$ Diagonale.

Sehe $G(H) := \frac{H \times H}{\Delta}$ Großendbreckgruppe (zu H).

Merke! $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow \exists z_1, z_2 \in H : (a_1 + z_1, b_1 + z_1) = (a_2 + z_2, b_2 + z_2)$

Schreibe $(a,b)^*$ für die Elemente in $G(H)$.

3.6 Lemma: $G(H)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(x,x)^*$.

Beweis: Zu $(a,b)^* \in G(H)$ gilt $\neg (b,a)^*$:

$(a,b)^* + (b,a)^* = (a+b, a+b)^*$, d.h. $(b,a)^*$ ist inverses Element.

Zu $(a,b)^*, (c,d)^* \in G(H)$ ist $(a,b)^* + (c,d)^* = (a+c, b+d)^*$
 " $(c,d)^* + (a,b)^* = (c+a, d+b)^*$. \square

3.7 Bsp.: $G(\mathbb{N}, +) \cong \mathbb{Z}$ per $\{(n,m) \mid n,m \in \mathbb{N}\} \xrightarrow{n-m} \mathbb{Z}$.

3.8 Lemma: (a) Habe Großendbreckabb. $\varphi: H \rightarrow G(H)$ Halbgruppenhom.
 $a \mapsto (a+x, x)^*$ Gruppenhom.

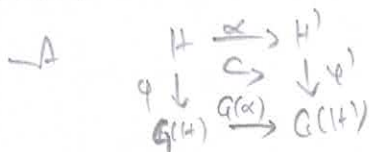
(weder injektiv noch surjektiv i.A.)

(b) Habe universelle Eigenschaft: $\forall \psi: H \rightarrow G$ Halbgruppenhom., G Gruppe:

$\exists! \alpha: G(H) \rightarrow G$ mit $\alpha((a,b)^*) = \psi(a) - \psi(b)$. Gruppenhom., $\alpha \circ \varphi = \psi$

Insbesondere $G(H) = \{\psi(a) - \psi(b) \mid a, b \in H\}$.

(c) Frakturabb.: $\alpha: H \rightarrow H'$ Halbgruppenhom. $\Rightarrow \exists! G(\alpha): G(H) \rightarrow G(H')$ Gruppenhom.



Beweis: (a) $\varphi(a+b) = (a+b+x, x)^* = (a+x+x, x+x)^* = (a+x, x)^* + (b+x, x)^* = \varphi(a) + \varphi(b)$.

(b) α Gruppenhom.: $\alpha((a,b)^* + (c,d)^*) = \alpha((a+c, b+d)^*) = \psi(a+c) - \psi(b+d) = \psi(a) - \psi(b) + \psi(c) - \psi(d) = \alpha((a,b)^*) + \alpha((c,d)^*)$

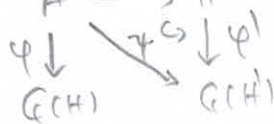
$\alpha \circ \varphi = \psi$: $\alpha \circ \varphi(a) = \alpha((a+x, x)^*) = \psi(a+x) - \psi(x) = \psi(a)$

ehd.: $\alpha' \circ \varphi = \psi$. Dann

$\alpha((a,b)^*) = \psi(a) - \psi(b) = \alpha'(\varphi(a)) - \alpha'(\varphi(b)) = \alpha'((a+x, x)^* - (b+x, x)^*) = \alpha'((a+x, x)^* + (x, b+x)^*) = \alpha'((a+2x, b+2x)^*) = \alpha'((a,b)^*)$

Anfänger $\varphi(a) - \varphi(b) = (a+x, x)^* - (b+x, x)^* = (a+x, x)^* + (x, b+x)^* = (a, b)^*$

(c) $H \xrightarrow{\alpha} H'$ $\neg \exists \psi := \varphi' \circ \alpha : H \rightarrow G(H')$ Halbgruppenhom.



$\Rightarrow \exists! G(\alpha): G(H) \rightarrow G(H')$ Gruppenhom.

$\neg \exists G(\alpha) \circ \varphi = \psi = \varphi' \circ \alpha$

3.9 Def.: A n - m -Mat. $K_0(A) := G(H(A)) = \{([p], [q])^* \mid p, q \in M_\infty(A) \text{ Proj.}\}$

3.10 Berechnung: (a) $K_0(0) = 0$, denn $M_\infty(0) = 0$.

(b) $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, denn $H(\mathbb{C}) = (\mathbb{N}, +)$ (dann Bsp. 3.7):

[For $p, q \in M_n(\mathbb{C})$ Proj. \exists $p \sim q \stackrel{2.3}{\iff} \text{rang } p = \text{rang } q \in \mathbb{N}$
 d.h. $[p]$ wird von $\text{rang } p \in \mathbb{N}$ bestimmt.]