## §3 Definition von $K_0$

**3.1 Def.:** Für eine $C^*$-Algebra $A$ betrachte $M_n(A) \subseteq M_{n+1}(A)$, $x \longmapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix}$

und setze $M_\infty(A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(A) = \{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid a_{ij}\in A,\ a_{ij}\neq 0 \text{ nur endlich oft}\}$

**3.2 Bemerkung:** (a) Ist $A$ eine $C^*$-Algebra, so ist auch $M_n(A) := \{(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \mid a_{ij}\in A\}$ eine $C^*$-Algebra: Sei $\pi : A \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$ eine treue Darstellung von $A$.
Dann definiert $\pi^{(n)} : M_n(A) \longrightarrow \mathcal{L}(H^n) \cong M_n(\mathcal{L}(H))$, $(a_{ij}) \longmapsto (\pi(a_{ij}))$ eine treue Darstellung
und $M_n(A)$ erhält eine $C^*$-Norm durch Zurückziehen: $\|(a_{ij})\| := \|(\pi(a_{ij}))\|$.
Für diese Matrixnorm gilt $\max_{ij} \|a_{ij}\| \le \|(a_{ij})\| \le \sum_{ij} \|a_{ij}\|$.

(b) Wir haben $M_n(A) \subseteq M_\infty(A)$ per $\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \mid a_{ij}=0 \text{ falls } i>n \text{ oder } j>n\}$.
Also besitzt $M_\infty(A)$ eine $C^*$-Norm $\|x\| = \|x\|_{M_n(A)}$ für $x\in M_n(A)\subseteq M_\infty(A)$,
ist mit dieser jedoch nicht vollständig – $M_\infty(A)$ ist keine $C^*$-Algebra.

**3.3 Def.:** Für $A$ $C^*$-Algebra setze $H(A) := \{[p] \mid p\in M_\infty(A) \text{ Projektion}\}$
wobei $[\cdot]$ Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$.

**3.4 Lemma:** (a) $[\cdot]$ ist auch Äquivalenzklasse bzgl. $\sim_h$.
(b) $H(A)$ ist eine abelsche Halbgruppe mit $[p]+[q] := [p'+q']$,
wobei $p,p',q,q' \in M_\infty(A)$ Projektionen, $p\sim p'$, $q\sim q'$, $p'\perp q'$.
Das neutrale Element ist $[0]$.

Beweis: (a) Seien $p,q\in M_\infty(A)$, d.h. $\exists n\in\mathbb{N}: p,q\in M_n(A)$.
Dann $p\sim q$ in $M_n(A)\subseteq M_\infty(A) \overset{2.7}{\Longrightarrow} p\sim_h q$ in $M_{2n}(A)\subseteq M_\infty(A)$
und $p\sim_h q$ in $M_n(A)\subseteq M_\infty(A) \Longrightarrow p\sim_h q$ in $M_2(M_n(A)) \cong M_{2n}(A)\subseteq M_\infty(A)$
$\overset{2.6}{\Longrightarrow} p\sim q$ in $M_{2n}(A)\subseteq M_\infty(A)$.

(b) $\exists p',q'$ für Addition: Zu $p,q\in M_n(A)$ setze $p' := \begin{pmatrix} p & \\ & 0\end{pmatrix}$, $q' := \begin{pmatrix} 0 & \\ & q\end{pmatrix}$
Add. hängt nicht von Wahl von $p',q'$ ab:
Seien $p,p',p'',q,q',q''\in M_\infty(A)$ Proj., $p\sim p'\sim p''$, $q\sim q'\sim q''$,
$p'\perp q'$, $p''\perp q''$
$\overset{2.8}{\Longrightarrow} p'+q' \sim p''+q''$, d.h. $[p'+q'] = [p''+q'']$

Assoz., Komm., neutr. El. ✓

3.5 **Def.**: $H$ abelsche Halbgruppe, $\Delta := \{(x,x) \mid x \in H\}$ Diagonale.

Setze $G(H) := \frac{H \times H}{\Delta}$ Grothendieckgruppe (zu $H$).

Hierbei $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2) :\iff \exists\, z_1, z_2 \in H : (a_1+z_1, b_1+z_1) = (a_2+z_2, b_2+z_2)$

Schreibe $(a,b)^\circ$ für die Elemente in $G(H)$.

3.6 **Lemma**: $G(H)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(x,x)^\circ$.

**Beweis**: Zu $(a,b)^\circ \in G(H)$ gibt es $(b,a)^\circ$:

$(a,b)^\circ + (b,a)^\circ = (a+b, a+b)^\circ$, d.h. $(b,a)^\circ$ ist inverses Element.

Zu $(a,b)^\circ, (c,d)^\circ \in G(H)$ ist $(a,b)^\circ + (c,d)^\circ = (a+c, b+d)^\circ = (c,d)^\circ + (a,b)^\circ$. □

3.7 **Bsp.**: $G(\mathbb{N},+) \cong \mathbb{Z}$ per $\{(n,m)^\circ \mid n,m \in \mathbb{N}\} \xrightarrow[\cong]{n-m} \mathbb{Z}$.

3.8 **Lemma**: (a) Habe Grothendieckabbildung $\varphi : H \to G(H),\ a \mapsto (a+x,x)^\circ$ Halbgruppenhom.

(weder injektiv noch surjektiv i.A.)

(b) Habe universelle Eigenschaft: $\forall \psi : H \to G$ Halbgruppenhom., $G$ Gruppe:

$\exists!\ \alpha : G(H) \to G$ mit $\alpha((a,b)^\circ) = \psi(a) - \psi(b)$ Gruppenhom., $\alpha \circ \varphi = \psi$

Insbesondere $G(H) = \{\varphi(a) - \varphi(b) \mid a, b \in H\}$.

(c) Funktorialität: $\alpha : H \to H'$ Halbgruppenhom. $\Rightarrow \exists!\, G(\alpha) : G(H) \to G(H')$ Gruppenhom.

mit

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H' \arrow[d, "\varphi'"] \\ G(H) \arrow[r, "G(\alpha)"] & G(H') \end{tikzcd}$$

**Beweis**. (a) $\varphi(a+b) = (a+b+x, x)^\circ = (a+b+x+x, x+x)^\circ = (a+x,x)^\circ + (b+x,x)^\circ = \varphi(a) + \varphi(b)$.

(b) $\alpha$ Gruppenhom.: $\alpha((a,b)^\circ + (c,d)^\circ) = \alpha((a+c, b+d)^\circ) = \psi(a+c) - \psi(b+d)$ "="

$\alpha((a,b)^\circ) + \alpha((c,d)^\circ) = \psi(a) - \psi(b) + \psi(c) - \psi(d)$"

$\alpha \circ \varphi = \psi$: $\alpha \circ \varphi(a) = \alpha((a+x,x)^\circ) = \psi(a+x) - \psi(x) = \psi(a)$

eind.: $\alpha' \circ \varphi = \psi$. Dann

$\alpha((a,b)^\circ) = \psi(a) - \psi(b) = \alpha'(\varphi(a)) - \alpha'(\varphi(b)) = \alpha'((a+x,x)^\circ - (b+x,x)^\circ)$

$= \alpha'((a+x,x)^\circ + (x,b+x)^\circ) = \alpha'((a+2x, b+2x)^\circ) = \alpha'((a,b)^\circ)$

Außerdem $\varphi(a) - \varphi(b) = (a+x,x)^\circ - (b+x,x)^\circ = (a+x,x)^\circ + (x,b+x)^\circ = (a,b)^\circ$

(c)
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & H' \arrow[d, "\varphi'"] \\ G(H) & G(H') \end{tikzcd}$$
mit $\psi := \varphi' \circ \alpha : H \to G(H')$ Halbgruppenhom.

$\overset{(b)}{\Longrightarrow} \exists!\, G(\alpha) : G(H) \to G(H')$ Gruppenhom.

mit $G(\alpha) \circ \varphi = \psi = \varphi' \circ \alpha$

□

3.9 Def.: $A$ u-Alg. $K_0(A) := G(H(A)) = \{([p],[q])^\sim \mid p,q \in M_\infty(A) \text{ Proj.}\}$

3.10 $\boxed{\text{Berechnung:}}$ (a) $K_0(0) = 0$, denn $M_\infty(0) = 0$.

(b) $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, denn $H(\mathbb{C}) = (\mathbb{N},+)$ (dann Bsp. 3.7):

[Für $p,q \in M_n(\mathbb{C})$ Proj. ist $p \sim q \overset{2.3}{\iff} \operatorname{rang} p = \operatorname{rang} q \in \mathbb{N}$
d.h. $[p]$ wird von $\operatorname{rang} p \in \mathbb{N}$ bestimmt.]