§4 Funktorialität, Additivität, endliche Stabilität, Homotopieinvarianz und das Standardbild von K_0

4.1 **Eigenschaft:** $K_0 : \{\text{unitale } C^*\text{-Algebren}\} \to \{\text{abelsche Gruppen}\}$ ist funktoriell:

(a) $\varphi: A \to B$ unitaler $*$-Hom. $\Rightarrow \exists\, \underbrace{\varphi_*}_{= K_0(\varphi)} : K_0(A) \to K_0(B)$ Gruppenhom.

(b) $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \Rightarrow K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(\varphi) \circ K_0(\psi)$

Beweis: $\varphi : A \to B$, $\quad a \mapsto \varphi(a)$

$\rightsquigarrow M_\infty(\varphi) : M_\infty(A) \to M_\infty(B)$, $\quad (a_{ij}) \mapsto (\varphi(a_{ij}))$

$\rightsquigarrow H(\varphi) : H(A) \to H(B)$, $\quad [p] \mapsto [M_\infty(\varphi)(p)]$

$\rightsquigarrow K_0(\varphi) : G(H(A)) \to G(H(B))$, $\quad ([p],[q])^\bullet \mapsto ([M_\infty(\varphi)(p)], [M_\infty(\varphi)(q)])^\bullet$

□

4.2 **Eigenschaft:** K_0 ist additiv: $K_0(A \oplus B) = K_0(A) \oplus K_0(B)$.

Beweis: $A \oplus B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ ist unitale C^*-Algebra per $(a_1,b_1) + (a_2,b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $(a,b)^* := (a^*, b^*)$ und $\|(a,b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}$, $1 = (1,1)$.

$$\underbrace{M_n(A \oplus B)}_{= \{((a_{ij}, b_{ij}))\}} \cong \underbrace{M_n(A) \oplus M_n(B)}_{= \{((a_{ij}), (b_{ij}))\}} \Rightarrow M_\infty(A \oplus B) \cong M_\infty(A) \oplus M_\infty(B)$$

$\Rightarrow H(A \oplus B) \cong H(A) \oplus H(B)$

$\Rightarrow K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B)$ nach 3.8(b) (univ. Eig. von $G(\cdot)$).

□

4.3 **Eigenschaft:** K_0 ist endlich stabil: $K_0(M_n(A)) = K_0(A)$.

Bew: $A \overset{j}{\hookrightarrow} M_n(A)$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow M_\infty(A) \xrightarrow{M_\infty(j)} M_\infty(M_n(A)) \cong M_\infty(A)$ Bijektion

$\Rightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(j)} K_0(M_n(A))$ Isomorphismus.

□

4.4 $\boxed{\text{Berechnung}}$: (a) $K_0(M_n(\mathbb{C})) \overset{4.3}{=} K_0(\mathbb{C}) \overset{3.10}{=} \mathbb{Z}$

(b) $K_0(\mathbb{C}^n) = K_0(\mathbb{C}\oplus \dots \oplus \mathbb{C}) \overset{4.2}{=} K_0(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus K_0(\mathbb{C}) \overset{3.10}{=} \mathbb{Z}^n$

(c) A endl.dim. $\Rightarrow A = \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})$, $n_i \in \mathbb{N}$

und $K_0(A) \overset{(a)+(b)}{=} \mathbb{Z}^k$

4.5 Def: A, B unitale C^*-Algebren.

(a) $\alpha, \beta: A \to B$ unitale $*$-Hom.

$\alpha \sim_h \beta$ (homotop) $:\Leftrightarrow \exists\, \varphi_t : A \to B$ unitale $*$-Hom., $t \in [0,1]$

mit $t \mapsto \varphi_t(a)$ stetig $\forall a \in A$, $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_1 = \beta$.

(b) $A \sim_h B :\Leftrightarrow \exists\, \alpha: A \to B, \beta: B \to A : \alpha\circ\beta \sim_h \mathrm{id}_B$, $\beta\circ\alpha \sim_h \mathrm{id}_A$.

(c) A kontrahierbar $:\Leftrightarrow A \sim_h 0$

4.6 Bem: $\alpha \sim_h \beta \Leftrightarrow \exists\, \varphi: A \to \mathcal{C}([0,1],A)$ unitaler $*$-Hom., $ev_0\circ\varphi = \alpha$, $ev_1 \circ \varphi = \beta$

wobei $ev_x : \mathcal{C}([0,1],A) \to A$
$f \mapsto f(x)$

22.10.

4.7 Lemma: (a) $A \sim_h \mathcal{C}([0,1],A)$

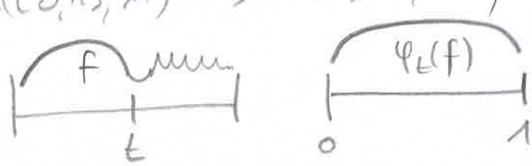
(b) $\mathcal{C}_0((0,1],A) \sim_h 0$, $CA := \mathcal{C}_0([0,1),A) \sim_h 0$

Bew: (a) $\mathcal{C}([0,1],A) = \{f : [0,1] \to A \text{ stetig}\}$ ist C^*-Alg. mit punktweisen Operationen und $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} \|f(t)\|$

Betrachte $\alpha: A \to \mathcal{C}([0,1],A)$
$a \mapsto (t \mapsto a)$ konstante Fkt.

$\beta: \mathcal{C}([0,1],A) \to A$
$f \longmapsto f(0)$

$\varphi_t : \mathcal{C}([0,1],A) \to \mathcal{C}([0,1],A)$, $\varphi_t(f)(s) := f(ts)$

also 

Streckung von $[0,t]$ auf $[0,1]$

Dann $\beta\circ\alpha = \mathrm{id}_A$, $\varphi_0 = \alpha\circ\beta$, $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}([0,1],A)}$

Also $\beta\circ\alpha = \mathrm{id}_A\ (\sim_h \mathrm{id}_A)$, $\alpha\circ\beta \sim_h \mathrm{id}_{\mathcal{C}([0,1],A)}$

(b) $\mathcal{C}_0([0,1],A) = \{f:[0,1]\to A \text{ stetig}, f(0)=0\}$

(nicht unitale) C^*-Algebra

Betrachte $\alpha: 0 \longrightarrow \mathcal{C}_0([0,1],A)$
$\qquad 0 \longmapsto 0$

$\beta: \mathcal{C}_0([0,1],A) \longrightarrow 0$
$\qquad f \longmapsto f(0)$

$\varphi_t: \mathcal{C}_0([0,1],A) \longrightarrow \mathcal{C}_0([0,1],A)$, $\varphi_t(f)(s) := f(ts)$

Dann $\beta\circ\alpha = id_0$ und $\underbrace{\alpha\circ\beta}_{=0} \sim_h id_{\mathcal{C}_0([0,1],A)}$ □

4.8 $\boxed{\text{Eigenschaft:}}$ K_0 ist homotopieinvariant:

(a) $\alpha \sim_h \beta \Rightarrow K_0(\alpha) = K_0(\beta)$

(b) $A \sim_h B \Rightarrow K_0(A) = K_0(B)$

Beweis: (a) Sei $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ mit $\varphi_0=\alpha$, $\varphi_1=\beta$.

Dann $[M_\infty(\varphi_t)(p)] = [M_\infty(\varphi_0)(p)]$ $\forall t\in[0,1]$,

da $[\cdot]$ auch Äq.-klasse bzgl. $\sim_h$ (L3.4)

$\Rightarrow H(\varphi_t)$ konstant $\Rightarrow K_0(\varphi_t)$ konstant.

(b) $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} B$, $\alpha\circ\beta \sim_h id_B$, $\beta\circ\alpha \sim_h id_A$

$\overset{(a)}{\Longrightarrow} K_0(\alpha)\circ K_0(\beta) = id_{K_0(B)}$, $K_0(\beta)\circ K_0(\alpha) = id_{K_0(A)}$ □

4.9 $\boxed{\text{Berechnung}}$: (a) $K_0(\mathcal{C}([0,1],A)) \overset{4.7,4.8}{=} K_0(A)$,

insbes. $K_0(\mathcal{C}[0,1]) = \mathbb{Z}$

(b) A kontrahierbar $\Rightarrow K_0(A) = 0$

insbes. $K_0(\mathcal{C}((0,1],A)) = K_0(CA) = K_0(\mathcal{C}(0,1]) = 0$

4.10 Def/Prop.: A nicht notwendigerweise unitale C^*-Algebra.

$$K_0(A) := \ker K_0(\sigma) \subseteq K_0(\tilde{A})$$

wobei $\underset{a+\lambda 1 \,\mapsto\, \lambda}{\sigma: \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}}$, $K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\sigma)} K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$

4.11 Lemma: A unital. Dann stimmen Def. 4.10 und Def. 3.9 von $K_0(A)$ überein.

Beweis: A unital, d.h. $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ ($A \oplus \mathbb{C}$ als C^*-Algebra).

Also $K_0(\tilde{A}) = K_0^{3.9}(A) \oplus K_0(\mathbb{C})$ und $\ker K_0(\sigma) = K_0^{3.9}(A)$,

denn $\sigma: A \oplus \mathbb{C} \cong \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(a, \lambda) \longmapsto \lambda$, d.h. $\ker \sigma = A \subseteq \tilde{A}$

$\Longrightarrow K_0^{4.10}(A) = \ker K_0(\sigma) = K_0^{3.9}(A)$. □

4.12 Bemerkung: K_0 hat auch für nicht unitale C^*-Algebren die Eigenschaften dieses Kapitels (4.1, 4.2, 4.3, 4.8).

4.13 Prop. (Standardbild von K_0): $\sigma: \tilde{A} \to \mathbb{C}$

(a) $K_0(A) = \{([p],[1_n])^\circ \mid [p], [\overset{M_n(\tilde{A})\,\cup}{1_n}] \in H(\tilde{A}),\ \sigma(p) \sim 1_n \in M_n(\mathbb{C})\}$

(b) $([p],[1_n])^\circ = 0 \iff \exists k: \begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix} \sim 1_{n+k}$

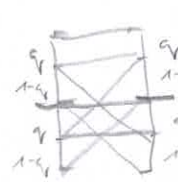
(c) $([p],[1_n])^\circ = ([q],[1_m])^\circ \iff \exists k \geq 0: \begin{pmatrix} p & \\ & 1_{m+k} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & \\ & 1_{n+k} \end{pmatrix}$

Beweis: (a) "$\supseteq$" $[p], [1_n] \in H(\tilde{A})$, $\sigma(p) \sim 1_n \in M_n(\mathbb{C})$.

Dann $K_0(\sigma)([p],[1_n])^\circ = ([\sigma(p)], [\sigma(1_n)])^\circ = ([1_n],[1_n])^\circ = 0$

$\Longrightarrow ([p],[1_n])^\circ \in \ker K_0(\sigma) = K_0(A)$

"$\subseteq$" $([p],[q])^\circ \in K_0(A) = \ker K_0(\sigma)$, $p, q \in M_n \tilde{A}$.



Setze $v := \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \in M_{2n} \tilde{A}$. Dann v unitär

und $v \begin{pmatrix} q & \\ & 1-q \end{pmatrix} v^* = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} q & \\ & 1-q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow ([p],[q])^\circ = \left(\left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1-q \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} q & \\ & 1-q \end{pmatrix}\right]\right)^\circ = \left(\left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1-q \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix}\right]\right)^\circ$

und $0 = \left(\left[\sigma\begin{pmatrix} p & \\ & 1-q \end{pmatrix}\right], [\sigma(1_n)]\right)^\circ \in K_0(\mathbb{C}) \Longrightarrow \sigma\begin{pmatrix} p & \\ & 1-q \end{pmatrix} \sim \sigma(1_n) = 1_n$

(b) „$\Leftarrow$" $\begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_k \end{pmatrix} \Rightarrow ([p],[1_n])^\circ = ([p]+[1_k],[1_n]+[1_k])^\circ$

$$= \left(\left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_k \end{pmatrix}\right]\right)^\circ$$

$$= 0$$

„$\Rightarrow$" $([p],[1_n])^\circ = 0 \Rightarrow \exists q \in M_k(\tilde{A})$ proj.: $\left[\begin{pmatrix} p & \\ & q \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1_n & \\ & q \end{pmatrix}\right]$

$$\Rightarrow \underset{\begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix}}{\underset{\wr}{\begin{pmatrix} p & & \\ & q & \\ & & 1_k-q \end{pmatrix}}} \sim \underset{\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_k \end{pmatrix}}{\underset{\wr}{\begin{pmatrix} 1_n & & \\ & q & \\ & & 1_k-q \end{pmatrix}}}$$

(denn $\begin{pmatrix} q & \\ & 1-q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$)

(c) „$\Leftarrow$" $([p],[1_n])^\circ = ([p]+[1_{m+k}],[1_n]+[1_{m+k}])^\circ$

$$= \left(\left[\begin{pmatrix} p & \\ & 1_{m+k} \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_{m+k} \end{pmatrix}\right]^\circ\right)$$

$$= \left(\left[\begin{pmatrix} q & \\ & 1_{n+k} \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1_m & \\ & 1_{n+k} \end{pmatrix}\right]^\circ\right)$$

$$= ([q],[1_m])^\circ$$

„$\Rightarrow$" $\exists r,s \in M_k(\tilde{A})$ Proj.: $([p]+[r],[1_n]+[r]) = ([q]+[s],[1_m]+[s])$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p & \\ & r \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} q & \\ & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_n & \\ & r \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1_m & \\ & s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p & & \\ & 1_m & \\ & & 1_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p & & & \\ & 1_m & & \\ & & r & \\ & & & 1_k-r \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} q & & & \\ & 1_m & & \\ & & s & \\ & & & 1_k-r \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} q & & & \\ & 1_n & & \\ & & r & \\ & & & 1_k-r \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & & \\ & 1_n & \\ & & 1_k \end{pmatrix}$$

$\square$