§5 Stetigkeit und Stabilität von K_0

5.1 Prop.: Sei $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \longrightarrow \ldots \quad A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \ldots$
ein „induktives System" von Objekten $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Morphismen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
also bspw. (a) A_n C^*-Algebren, φ_n *-Hom.
(b) A_n Gruppen, φ_n Gruppenhom.

Es existiert ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Objekt $\varinjlim_{\varphi_n} A_n$,
der „induktive Limes", und Morphismen $\overline{\varphi_n}: A_n \longrightarrow \varinjlim_{\varphi_n} A_n$ in den
Fällen (a) und (b) mit der universellen Eigenschaft: $\forall (\beta_n), B \ \exists!\, \beta$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \varinjlim_{\varphi_n} A_n \arrow[ddd, dashed, "\exists!\,\beta"] \\
 & & & \\
\ldots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[uurr, bend left, "\overline{\varphi_n}"] \arrow[ddrr, bend right, "\beta_n"'] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[uur, bend left, "\overline{\varphi_{n+1}}"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_{n+1}"'] & \ldots \circlearrowleft \\
 & & & B
\end{tikzcd}$$

(i.A. ex. der ind. Limes <u>nicht</u>, aber für (a) und (b) schon)

<u>Bew.:</u> (a) Def.: • $\mathfrak{A} := \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in A_n, \ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: x_{n+1} = \varphi_n(x_n) \}$
• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \ :\Longleftrightarrow \ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: x_n = y_n$
• $\| [(x_n)] \| := \lim \|x_n\|_{A_n}$ für $[(x_n)] \in \mathfrak{A}/\sim$
• $\varinjlim_{\varphi_n} A_n := \overline{\dfrac{\mathfrak{A}/\sim}{\{[(x_n)] \mid \|[(x_n)]\| = 0\}}}^{\|\cdot\|}$
• $\overline{\varphi_n}(x) := [(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{x}, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(\varphi_n(x)), \ldots)]$ für $x \in A_n$

Eig.: • Auf $\mathfrak{A}$ ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation
• Für $(x_n) \in \mathfrak{A}$ gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$ $\forall n \geq N$ gilt:
$\forall n \geq N$: $\|x_{n+1}\|_{A_{n+1}} = \|\varphi_n(x_n)\|_{A_{n+1}} \leq \|x_n\|_{A_n}$, d.h. $\lim \|x_n\|_{A_n}$ ex.

- $\|[(x_n)]\|$ ist eine C^*-Halbnorm auf $\mathcal{A}/_\sim$
- $\varinjlim_{\varphi_n} A_n$ ist eine C^*-Algebra
- $\bar\varphi_n(x) \in \varinjlim_{\varphi_n} A_n \ \forall x \in A_n$, $\bar\varphi_n : A_n \to \lim A_n$ $*$-Hom.

  und $\bar\varphi_{n+1} \circ \varphi_n = \bar\varphi_n$, denn

$$\left.\begin{aligned}\bar\varphi_{n+1}\circ\varphi_n(x) &= [(0,\dots,0,0,\varphi_n(x),\varphi_{n+1}\varphi_n(x),\dots)]\\ \bar\varphi_n(x) &= [(0,\dots,0,\underset{n}{x},\varphi_n(x),\varphi_{n+1}\varphi_n(x),\dots)]\end{aligned}\right) \leftarrow \text{wg. } \mathcal{A}/_\sim$$

univ. Eig (Konstruktion von β): Sei $[(x_n)] \in \varinjlim A_n$. Dann ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$ $\forall n \geq N$. Also für $n \geq N$: $\beta_n(x_n) = \beta_{n+1}(\varphi_n(x_n)) = \beta_{n+1}(x_{n+1})$.
Somit $\beta([(x_n)]) := \underbrace{\lim_{n\to\infty} \beta_n(x_n)}_{\text{"}\beta_N(x_N)\text{"}}$ wohldef., $\beta\bar\varphi_n = \beta_n$, eindeutig.

$n = N$ für "$\beta_n(x_n) = \beta_{n+1}(x_{n+1})$"

$$\left(\begin{aligned}\text{denn } \beta\bar\varphi_n(x) &= \beta([(0,\dots,0,x,\varphi_n(x),\varphi_{n+1}(\varphi_n(x)),\dots)])\\ &= \beta_N(x_N) = \beta_n(x)\end{aligned}\right)$$

$\lim A_n$ eind.:

$$\begin{tikzcd}
 & & \lim A_n \arrow[dd, bend right, "\beta"'] \\
A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[urr, bend left, "\bar\varphi_n"] \arrow[drr, bend right, "\bar\varphi'_n"'] & A_{n+1} \arrow[ur, "\bar\varphi_{n+1}"] \arrow[dr, "\bar\varphi'_{n+1}"] & \\
 & & A' \arrow[uu, bend right, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

β ex. nach univ. Eig. von $\lim A_n$

β' ex. nach univ. Eig. von A'

Mit $B = \lim A_n$ ist $\mathrm{id} : \lim A_n \to B$ die eindeutige Abb. aus der univ. Eig. von $\lim A_n$, d.h. $\beta' \circ \beta = \mathrm{id}_{\lim A_n}$ und ebenso $\beta \circ \beta' = \mathrm{id}_{A'}$ $\Rightarrow A' \cong \lim A_n$.

(b) $\lim A_n := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in A_n,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_{n+1} = \varphi_n(x_n)\}/_\sim$

Rest genauso (ohne Norm). □

24.10.

(C*-Alg.)

5.2 Korollar: Für $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A$ ist $\varinjlim_{\varphi_n} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subseteq A$

wobei $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$, $x \mapsto x$.

Beweis: Prüfe nach, dass $\overline{\bigcup A_n}$ die univ. Eig. hat:

Für $\beta_n : A_n \to B$ lässt sich $\beta : \overline{\bigcup A_n} \to B$ definieren per $\beta_{|A_n} = \beta_n$ und dann Fortsetzung. Da $\lim A_n$ eind. mit dieser univ. Eig., folgt $\lim A_n \cong \overline{\bigcup A_n}$. □

5.3 Prop.: Sei $(A_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein induktives System von C*-Algebren.

(a)

(b) Seien $\beta_n : A_n \to B$ Abbildungen wie in Prop. 5.1, $\beta : \varinjlim A_n \to B$.
Ist $\bigcup \beta_n(A_n) \subseteq B$ dicht, so ist β surjektiv.
Sind alle β_n injektiv, so ist β injektiv.

(c) Sind alle A_n einfach, so ist auch $\varinjlim A_n$ einfach.

(d) Auch $\varphi_n^{(k)} : M_k(A_n) \to M_k(A_{n+1})$, $(a_{ij}) \mapsto (\varphi_n(a_{ij}))$ ist ein induktives System

(e) und $\varinjlim M_k(A_n) = M_k(\varinjlim A_n)$.

Bew: (b) Surjektivität ist klar, da $\bigcup \beta_n(A_n) \subseteq \beta(\lim A_n)$ und $\beta(\lim A_n)$ abgeschlossen.
Injektivität ist klar, da $0 = \beta([(x_n)]) = \beta_N(x_N) \Rightarrow x_N = 0$

$$\Rightarrow [(x_n)] = [(x_1, \dots, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_N}}, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi_N x_N}}, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi_{N+1}\varphi_N x_N}}, \dots)] = [(0)].$$

(c) [...]

(c–e) [...] □

5.4 Def: Ist (A_n, φ_n) ein induktives System von endlich-dimensionalen C*-Algebren, so heißt $\varinjlim A_n$ eine AF (approximately finite dimensional) Algebra.

5.5 Bsp.: (a) $M_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow M_{n+1}(\mathbb{C})$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow \lim M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{K}(H)$, H sep.

(b) $M_2(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{C}) \to M_8(\mathbb{C}) \to \dots \to M_{2^\infty}(\mathbb{C}) := \lim M_{2^n}$
$x \mapsto \begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix}$

UHF algebra

(a) Für $x \in \varinjlim A_n$ ex. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in \overline{\varphi}_{N_k}(A_{N_k})$, $x_n \to x$, d.h. $\lim A_n = \overline{\bigcup \varphi_n(A_n)}$

(e) $\lim \widetilde{A_n} = \lim \tilde{A}_n$

Bew. von 5.3 (a):

$$x \in \varinjlim A = \overline{\mathfrak{A}/\sim}^{\|\cdot\|} \Big/ \{\|[(x_n)]\| = 0\}$$

$\Rightarrow \exists (y^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}/\sim$ mit $y^k \to x$, $y^k = [(y^k_n)]$.

Zu $[(y^k_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ex. N_k mit $y^k_{n+1} = \varphi_n(y^k_n)$, $n \geq N_k$

Setze $x_k := \bar{\varphi}_{N_k}(y^k_{N_k}) \in \bar{\varphi}_{N_k}(A_{N_k})$

$$x_k = [(0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ N_k}}{y^k_{N_k}}, \varphi_{N_k}(y^k_{N_k}), \varphi_{N_k+1}\varphi_{N_k}(y^k_{N_k}), \ldots)]$$

$$\|$$

$$y^k = [(y^k_1, \ldots, y^k_{N_k-1}, y^k_{N_k}, \varphi_{N_k}(y^k_{N_k}), \varphi_{N_k+1}\varphi_{N_k}(y^k_{N_k}), \ldots)]$$

$$\downarrow$$

$$x$$

5.6 $\boxed{\text{Eigenschaft:}}$ K_0 ist stetig, d.h. $K_0(\varinjlim_{\varphi_n} A_n) \cong \varinjlim_{K_0(\varphi_n)} K_0(A_n)$.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & & \lim K_0(A_n) \arrow[d, "\exists!\beta"] \\
\ldots \arrow[r] & K_0(A_n) \arrow[r, "K_0(\varphi_n)"] \arrow[urr, bend left, "\tau_n"] \arrow[drr, bend right, "K_0(\overline{\varphi}_n)"'] & K_0(A_{n+1}) \arrow[r] \arrow[ur, "\tau_{n+1}"] \arrow[dr, "K_0(\overline{\varphi}_{n+1})"] & \ldots \\
 & & & K_0(\lim A_n)
\end{tikzcd}$$

$K_0(\overline{\varphi}_n)$ nach 4.1
$\tau_n, \lim K_0(A_n), \beta$ nach 5.1

vereinfachende Annahme: A_n unital, φ_n injektiv, $\lim A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ (5.2, 5.3)

β surj.: Sei $([p],[1_k])^\circ \overset{4.13}{\in} K_0(\lim A_n)$, $p \in M_k(\lim A_n) \overset{5.3}{=} \overline{\bigcup M_k(A_n)}$ Proj.

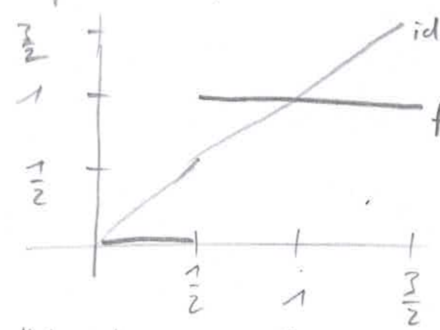
Es ex. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in A_n$ mit $x_n \to p$. Setze $h_n := x_n^* x_n$.

Dann $h_n \to p^*p = p$ und $h_n^2 - h_n \to p^2 - p = 0$

Also ex. $N \in \mathbb{N}$ und $0 \le h \in M_k(A_N)$ mit $\|p-h\| < \frac{1}{2}$, $\|h^2 - h\| < \frac{1}{4}$.

Betrachte $f: [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},\frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,\frac{1}{2}) \\ 1 & t \in (\frac{1}{2},\frac{3}{2}] \end{cases}$$



Dann $\|\mathrm{id} - f\|_\infty \le \frac{1}{2}$.

Es ist $\frac{1}{2} \notin \mathrm{Sp}\, h \subseteq [0,\frac{3}{2}]$, da $\|h\| \le \|h-p\| + \|p\| \le \frac{3}{2}$, $h \ge 0$

und $\|\mathrm{id}_{\mathrm{Sp}\,h}^2 - \mathrm{id}_{\mathrm{Sp}\,h}\|_\infty = \|h^2 - h\| < \frac{1}{4} \implies \frac{1}{2} \notin \mathrm{Sp}\, h$

Also f auf $\mathrm{Sp}\, h$ stetig und $q := f(h) \in M_k(A_N)$ nach Fkalk., q Proj.

und $\|p - q\| \le \|p - h\| + \|h - f(h)\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\overset{2.5}{\implies} p \sim_{h_0} q \overset{2.6}{\implies} p \sim q$.

Also $K_0(\overline{\varphi}_N)([q],[1_k])^\circ = ([q],[1_k])^\circ = ([p],[1_k])^\circ$

β inj.: (Skizze) $\beta([p],[1_m])^\circ = \beta([q],[1_n])^\circ \in K_0(\lim A_n) \overset{4.13}{\implies} \begin{pmatrix} p & \\ & 1_{m+k} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & \\ & 1_{n+k} \end{pmatrix}$

$\overset{2.6 \& 2.7}{\implies} \exists u \in M_r \lim A_n$ unitär mit $\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{Fkalk. wie oben}}{\implies} \exists u' \in M_r A_N$ unitär mit $\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & \\ & 1 \end{pmatrix} \overset{4.13}{\implies} ([p],[1_n])^\circ = ([q],[1_m])^\circ$

$\square$

5.7 **Eigenschaft:** K_0 ist stabil, d.h. $K_0(A \otimes \mathcal{K}) = K_0(A)$

$(\mathcal{K} = \mathcal{K}(H),\ H \text{ sep.})$

Beweis: $\dots \to M_n(\mathbb{C}) \to M_{n+1}(\mathbb{C}) \to \dots \to \mathcal{K}$ (wie in Bsp. 5.5)

$x \longmapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix}$

bzw. $\dots \to M_n(A) \to M_{n+1}(A) \to \dots \to A \otimes \mathcal{K}$

$x \longmapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 0 \end{pmatrix}$

liefert

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \to K_0(M_n(A)) & \to & K_0(M_{n+1}(A)) & \to & \dots & \xrightarrow{5.6} & K_0(A \otimes \mathcal{K}) \\ \uparrow \wr\!\wr\, 4.3 & \circlearrowleft & \uparrow \wr\!\wr\, 4.3 & & & & \uparrow \cong \\ \dots \to K_0(A) & \xrightarrow[id]{} & K_0(A) & \xrightarrow[id]{} & \dots & \to & K_0(A) \end{array}$$

$\square$

5.8 **Berechnung:** (a) $K_0(\mathcal{K}) \overset{5.7}{=} K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

(b) $M_2(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{C}) \to M_8(\mathbb{C}) \to \dots \to M_{2^\infty}(\mathbb{C})$ UHF

$x \longmapsto \begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix}$

liefert

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(M_2(\mathbb{C})) \to \dots & K_0(M_{2^k}(\mathbb{C})) & \xrightarrow{[e_{11}] \mapsto [(e_{11}\ e_{11})] = [e_{11}]+[e_{11}]} & K_0(M_{2^{k+1}}(\mathbb{C})) & \to \dots & \xrightarrow{5.6} & K_0(M_{2^\infty}(\mathbb{C})) \\ \wr\!\wr & \wr\!\wr & & \wr\!\wr & & & \\ \mathbb{Z} \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & & \to & \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \end{array}$$

wobei $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] := \{ \frac{m}{2^k} \mid m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{Q}$

(c) $K_0(\mathcal{L}(H)) = 0$, H sep. :

Sei $p \in M_n(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H^n)$ Proj.

Dann $p = \begin{pmatrix} p & \\ & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ in $M_{n+1}(\mathcal{L}(H))$, $\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

(beide unendl. Proj.)

d.h. $[p] + [\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}]$

Also für $([p],[q])^\circ \in K_0(\mathcal{L}(H))$:

$([p],[q])^\circ = ([p] + [\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}], [q] + [\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}])^\circ = ([\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}], [\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}])^\circ = 0.$

(d) Sei M Faktor vom Typ I_n, I_∞, II_∞ oder III. Dann $K_0(M) = 0$.

Denn für $p \in M_n(M) \subseteq M_{n+1}(M)$, $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(M)$ gilt $\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ wie in (c), auch im Fall II_∞, III ($1 \in M$ unendl.). Für Typ I_n siehe 4.4.

(e) Sei M Faktor vom Typ II_1. Dann $K_0(M) \cong \mathbb{R}$.

(e) Sei $\mathcal{M}$ Faktor vom Typ II_1. Dann $K_0(M) = \mathbb{R}$:

Habe Dimensionsfkt $D: \{\text{Proj. in } M\} \to \mathbb{R}$ und dann auch auf $M_n(M)$.

Also $D^\#: H(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ wohldef. ($p \sim q \Rightarrow D_n(p) = D_n(q)$)

$[p] \longmapsto D_n(p)$, $p \in M_n(M)$

und Halbgruppenhom.: $D^\#([p]+[q]) = D^\#([p'+q'])$

$$\text{da } p' \perp q' \longrightarrow = D^\#([p']) + D^\#([q'])$$
$$= D^\#([p]) + D^\#([q])$$

$\overset{\text{univ. Eig.}}{\Longrightarrow} \exists!\ \alpha: K_0(M) \to \mathbb{R}$ Gruppenhom.

$([p],[q])^\circ \longmapsto D^\#([p]) - D^\#([q])$

α surj.: Zu $r \in \mathbb{R}$, ex. $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, D(1)]$ mit $nt = |r|$, zu t ex. p_t Proj. mit $D(p_t) = t$.

Also $D^\#\left(\left[\begin{pmatrix} p_t & \\ & \ddots \\ & & p_t \end{pmatrix}\right]\right) = n \cdot D(p_t) = |r|$.

Und $\alpha\left(\left[\begin{pmatrix} p_t & \\ & \ddots & \\ & & p_t\end{pmatrix}\right], 0\right)^\circ = |r|$

$\alpha\left(0, \left[\begin{pmatrix} p_t & \\ & \ddots & \\ & & p_t\end{pmatrix}\right]\right)^\circ = -|r|$

α inj.: $D_n(p) - D_n(q) = \alpha([p],[q])^\circ = \alpha([r],[s])^\circ = D_n(r) - D_n(s)$

$\Rightarrow D_n(p'+s') = D_n(r'+q')$

$\Rightarrow p'+s' \sim r'+q'$

$\Rightarrow ([p],[q])^\circ = ([p]+[s], [q]+[s])^\circ$

$= ([r]+[q], [s]+[q])^\circ$

$= ([r],[s])^\circ$

5.9 Satz [Elliott 1976]: A, B AF-Algebren.

„Dimensionsgruppe"

$$A \cong B \iff (K_0(A), K_0^+(A), \Gamma(A)) \cong (K_0(B), K_0^+(B), \Gamma(B))$$

wobei $K_0^+(A) = H(A)$, $\Gamma(A) = \{[p] \mid p \in A \text{ Proj.}\} = \{x \in K_0(A) \mid 0 \le x \le [1_A]\}$

$\uparrow$ von $K_0^+(A)$

geordnet per $[p] \le [q] :\iff p \sim q' \le q$

5.10 <u>Bsp.</u>: $K_0(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ d.h. $M_2(\mathbb{C}) \not\cong M_4(\mathbb{C})$ wg. Γ.

$K_0^+(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}^+$

$\Gamma(M_n(\mathbb{C})) = \{1, \ldots, n\}$

5.11.