§6 Halbexaktheit und Splitexaktheit von K_0, ~~Produkte~~

6.1 Def: Sei $\cdots \to A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots$ ein System von Objekten A_n und Morphismen φ_n.

(a) Die Sequenz heißt exakt, falls $\ker \varphi_{n+1} = \mathrm{Bild}\, \varphi_n$.

(b) Die Folge $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ heißt kurze exakte Sequenz, falls ι injektiv, π surjektiv und $\ker \pi = \mathrm{Bild}\, \iota$ ist.

(c) Die Folge
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\varphi"'] & 0 \end{tikzcd}$$
heißt zerfallend, wenn zusätzlich $\pi \circ \varphi = id_B$ gilt. Die Abb. φ heißt dann auch Split.

6.2 Lemma: $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ kurze exakte Seq. von C^*-Alg. $\iff I \triangleleft A$, $B \cong A/I$

Beweis: ι injektiv, also $I \subseteq A$; $I = \mathrm{Bild}\, \iota = \ker \pi$, also Ideal in A;
π surjektiv, also $B \cong A/\ker \pi = A/I$. □

6.3 Lemma: Ist $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \underset{\pi}{\overset{\varphi}{\leftrightarrows}} B \to 0$ eine zerfallende Sequenz von Gruppen, so ist $A \cong I \oplus B$.

Beweis: $\alpha : I \oplus B \to A$ Gruppenhom.
$(x,y) \mapsto \iota x + \varphi y$

α inj.: $\alpha(x,y) = 0 \Rightarrow y = \pi(\iota x + \varphi y) = 0$

α surj.: für $z \in A$ setze $x := z - \varphi \pi z \in \ker \pi = \mathrm{Bild}\, \iota = I$, $y := \pi z \in B$. □

6.4 Bemerkung: Lemma 6.3 ist nicht wahr für C^*-Algebren, d.h. $A \not\cong I \oplus B$ (α kein $*$-Hom.) ($0 \to A \to \tilde{A} \to \mathbb{C} \to 0$ exakt, zerfallend, $\tilde{A} \neq A \oplus \mathbb{C}$)

6.5 Lemma: Ist $0 \to I \to A \to \mathbb{Z} \to 0$ exakte Sequenz von Gruppen, so zerfällt die Sequenz bereits.

Bew: Zu $1 \in \mathbb{Z}$ ex. $b \in A$ mit $\pi(b) = 1$. Dann ist $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ Hom., $\pi\varphi = id$ □
$n \mapsto nb := \underbrace{b + \dots + b}_{n \text{ mal}}$
(bzw. $(-b) + \dots + (-b)$)

6.6 $\boxed{\text{Eigenschaft}}$: K_0 ist halbexakt:

$0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ exakte Seq. von C^*-Algebren

$\Rightarrow K_0 I \to K_0 A \to K_0 B$ exakt (d.h. $\mathrm{Bild}\, K_0(\iota) = \ker K_0(\pi)$).

<u>Bew.:</u> „$\subseteq$": $\pi \circ \iota = 0 \Rightarrow K_0(\pi) \circ K_0(\iota) = 0 \Rightarrow \mathrm{Bild}\, K_0(\iota) \subseteq \mathrm{Ker}\, K_0(\pi)$.

„$\supseteq$": Sei $([p],[1_n])^\circ \in K_0(A)$ mit $K_0(\pi)([p],[1_n])^\circ = ([\pi(p)],[1_n])^\circ = 0$.

$\overset{4.13}{\Longrightarrow} \exists k: \begin{pmatrix} \pi(p) & \\ & 1_k \end{pmatrix} \sim 1_{n+k}$

Setze $p' := \begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix} \in M_N(\tilde{A})$. Also $\pi(p') \sim 1_{n+k}$

$\overset{2.7\,\&\,2.6}{\Longrightarrow} \exists u \in U_0(M_{2N}(\tilde{B}))$ mit $u\pi(p')u^* = 1_{n+k}$

[Lift] $\overset{\pi \text{ surj.}, 1.14}{\Longrightarrow} \exists w \in U_0(M_{2N}(\tilde{A}))$ mit $\pi(w) = u$

Da $\pi(wp'w^* - 1_{n+k}) = u\pi(p')u^* - 1_{n+k} = 0$, ist $wp'w^* - 1_{n+k} \in \mathrm{Ker}\, \pi = \mathrm{Bild}\, \iota$.

Also ex. $q \in \tilde{I}$ Proj. mit $\iota(q) = wp'w^*$.

($\exists a, b \in \tilde{I}$ mit $\iota(a) = wp'w^* - 1_{n+k}$, $\iota(b) = 1_{n+k}$. Setze $q := a + b \in \tilde{I}$, dann q Proj., da ι inj., $\iota(q)$ Proj.)

$\Rightarrow ([p],[1_n])^\circ = ([p'],[1_{n+k}])^\circ = ([\iota(q)],[1_{n+k}])^\circ \in \mathrm{Bild}\, K_0(\iota)$

$\square$

6.7 $\boxed{\text{Eigenschaft:}}$ K_0 ist splitexakt:

$$0 \to I \xrightarrow{\iota} A \underset{\varphi}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} B \to 0 \text{ zerfallende Seq. von } C^*\text{-Alg.}$$

$\Rightarrow 0 \to K_0 I \to K_0 A \rightleftarrows K_0(B) \to 0$ zerfällt, insbes. $K_0 A = K_0 I \oplus K_0 B$.

<u>Bew.:</u> $K_0(\pi) \circ K_0(\varphi) = \mathrm{id}_{K_0(B)} \Rightarrow K_0(\varphi)$ Split, $K_0(\pi)$ surj.

Nach 6.6 z.z. $K_0(\iota)$ injektiv.

Sei $([p],[1_n])^\circ \in K_0 I$ mit $K_0(\iota)([p],[1_n])^\circ = 0$, $p \in M_N \tilde{I}$, d.h. $p - 1_n \in M_N I$

$\overset{4.13}{\Longrightarrow} \exists k: \begin{pmatrix} \iota(p) & \\ & 1_k \end{pmatrix} \sim 1_{n+k}$, $p' := \begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix} \in M_N(\tilde{I})$, $\iota(p') \sim 1_{n+k}$.

$\overset{2.7\,\&\,2.6}{\Longrightarrow} \exists u \in U_0(M_{2N}(\tilde{A}))$ mit $u\iota(p')u^* = 1_{n+k}$

Setze $v := \varphi\pi(u^*)u \in M_{2N}(\tilde{A})$. Dann $\pi(v) = \pi(u^*)\pi(u) = 1$

[Lift] $\Rightarrow v - 1 \in \mathrm{Ker}\, \pi = \mathrm{Bild}\, \iota$, d.h. $\exists w \in M_{2N} \tilde{I}: \iota(w) = v$

($w_0 \in M_{2N} \tilde{I}$ mit $\iota(w_0) = v - 1$, $w := w_0 + 1$)

Da v unitär ist und ι injektiv ist, ist auch w unitär.

Außerdem $\iota(wp'w^*) = v\iota(p')v^* = \varphi\pi(u^*)u\iota(p')u^*\varphi\pi(u) = \varphi\pi(u^* 1_{n+k} u)$

$= \varphi\pi\iota(p') = \iota(1_{n+k})$

$\overset{\iota \text{ inj.}}{\Longrightarrow} wp'w^* = 1_{n+k}$, d.h. $([p],[1_n])^\circ = 0$ in $K_0 I$

$\left(\begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix} \sim_u 1_{n+k} \right)$

$\pi \circ \iota|_{\tilde{I}} = 0$

also $\pi \circ \iota|_{\tilde{I}}(p')$

$= \pi \circ \iota|_{\tilde{I}}\left(\begin{pmatrix} p & \\ & 1_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_k \end{pmatrix}\right)$

$+ \pi \circ \iota|_{\tilde{I}}\begin{pmatrix} 1_n & \\ & 1_k \end{pmatrix}$

$= \pi \circ \iota|_I\begin{pmatrix} p-1 & \\ & 0 \end{pmatrix} + \pi \circ \iota|_{\tilde{I}}(\ldots)$

$= 0 + 1_{n+k} \in M_N \tilde{B}$

$\square$

6.8 **Berechnung:** $A := \{ f \in C([0,1], M_n(\mathbb{C})) \mid f(1) \in D_n \subseteq M_n(\mathbb{C}) \} \subseteq C([0,1], M_n(\mathbb{C}))$

wo $D_n := \{ a \in M_n(\mathbb{C})$ Diagonalmatrix $\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$

A C^*-Alg., da abgeschl. C^*-Unteralg. von $C([0,1], M_n(\mathbb{C}))$

$K_0(D_n) = K_0(\mathbb{C}^n) \overset{4.4}{=} \mathbb{Z}^n$

$K_0(C([0,1), M_n(\mathbb{C}))) = K_0(CM_n(\mathbb{C})) \overset{4.9}{=} 0$

$$0 \to C([0,1), M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow A \underset{\text{konst. Fkt.}}{\rightleftarrows} D_n \longrightarrow 0 \quad \text{zerfallend}$$

$$f \longmapsto f, \quad f \longmapsto f(1)$$

$\overset{6.7}{\Rightarrow}$ $K_0(A) = K_0(CM_n(\mathbb{C})) \oplus K_0(D_n) = \mathbb{Z}^n$