§ 7 K_1

7.1 Def: $U^\infty \tilde{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U(M_n\tilde{A})$ per $U(M_n\tilde{A}) \hookrightarrow U(M_{n+1}\tilde{A})$, $x \longmapsto \begin{pmatrix} x & \\ & 1\end{pmatrix}$

$U_0^\infty \tilde{A} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_0(M_n\tilde{A})$

$K_1(A) := U^\infty\tilde{A} \big/ U_0^\infty\tilde{A}$ per $u\sim v :\iff v^*u \in U_0^\infty\tilde{A}$

7.2 Lemma: (a) Es sind äquivalent:

(i) $[u]=[v]$

(ii) $\exists n\in\mathbb{N}$: $u,v\in M_n\tilde{A}$ und $u\sim_h v$ in $U_0(M_n\tilde{A})$ (d.h. $\gamma_t\in M_n\tilde{A}$)

(iii) $u\sim_h v$ in $U^\infty\tilde{A}$ (d.h. $\gamma_t\in M_{n_t}\tilde{A}$)

(b) $K_1(A)$ abelsche Gruppe per $[u][v] := [uv]$, $[u]^{-1} = [u^*]$, $[1]=e$

Beweis: (a) (i)$\Rightarrow$(ii): $[u]=[v]$, d.h. $v^*u\in U_0^\infty\tilde{A}$, also ex. $n\in\mathbb{N}$ mit $v^*u\in U_0(M_n\tilde{A})$.
Somit ex. $(\gamma_t)\subseteq U(M_n\tilde{A})$ mit $\gamma_0 = v^*u$, $\gamma_1 = 1$.
Setze $\tilde\gamma_t := (v\gamma_t)$. Dann $\tilde\gamma_0 = u$, $\tilde\gamma_1 = v$, also $u\sim v$ in $M_n\tilde{A}$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Für $(\gamma_t)\subseteq U(M_n\tilde{A})$ mit $\gamma_0 = u$, $\gamma_1 = v$ ist $\tilde\gamma_t := v^*\gamma_t$ Homotopie mit $\tilde\gamma_0 = v^*u$, $\tilde\gamma_1 = 1$, also $v^*u\sim_h 1$, d.h. $[u]=[v]$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): ✓

(iii)$\Rightarrow$(ii): Sei $\gamma_t\in U(M_{n_t}\tilde{A})$ mit $\gamma_0 = u$, $\gamma_1 = v$.
Wähle $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ mit $\|\gamma_{t_i}-\gamma_{t_{i+1}}\|<2$ und also (L4.4)
$u=\gamma_{t_0}\sim_h\gamma_{t_1}\sim_h\gamma_{t_2}\sim_h\dots\sim_h\gamma_{t_n}=v$ in $U(M_{\max(n_{t_0},\dots,n_{t_n})}\tilde{A})$.

(b) $[u][v] = \left[\begin{pmatrix} uv & \\ & 1\end{pmatrix}\right] \overset{4.6}{=} \left[\begin{pmatrix} vu & \\ & 1\end{pmatrix}\right] = [v][u]$ □

7.3 Eigenschaft: K_1 ist homotopieinvarianter Funktor

Beweis: $\varphi: A\to B$
$\rightsquigarrow \tilde\varphi:\tilde{A}\to\tilde{B}$ und $U_0^\infty\tilde{A}\to U_0^\infty\tilde{B}$ (1.4)
$\rightsquigarrow U^\infty\tilde{A}\to U^\infty\tilde{B}$
$\rightsquigarrow K_1A \to K_1B$ □

3.11.

7.4 Def: Für C^*-Algebra A, setze $SA := C_0((0,1),A) := A(0,1)$
"Einhängung"

7.5 Lemma: Die Einhängung ist ein Funktor:
$\varphi: A\to B$ *-Hom. $\Rightarrow$ $S\varphi: SA\to SB$ *-Hom per $S\varphi(f)(t) := \varphi(f(t))$.
und $S_{\varphi\circ\psi} = S_\varphi\circ S_\psi$.

7.6 Lemma: (a) $\widetilde{SA} = \{f : [0,1] \to \tilde{A} \mid f = \lambda 1 + g,\ \lambda \in \mathbb{C},\ g \in SA\}$
$= SA + \mathbb{C}1$

(b) $M_n(\widetilde{SA}) = \{f : [0,1] \to M_n\tilde{A} \mid f = x + g,\ x \in M_n(\mathbb{C}),\ g \in M_n(SA)\}$

7.7 Satz: Es gilt $K_0(SA) \cong K_1(A)$.

Beweis: 1.) Konstruiere $\alpha : K_1(A) \to K_0(SA)$.

⌈1.) Sei $u \in U(M_n\tilde{A})$. Also $\begin{pmatrix} u & \\ & u^* \end{pmatrix} \sim_h 1$ via etwa (γ_t) (L1.6)

Setze $p : [0,1] \to M_{2n}(\tilde{A})$ Pfad von Projektionen,
$t \mapsto \gamma_t \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \gamma_t^*$

$p(0) = p(1) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, also $p \in M_{2n}(\widetilde{SA})$

⌊ Setze $\alpha([u]) := ([p],[1_n])^\circ \in K_0(SA)$

2.) Konstruiere $\beta : K_0(SA) \to K_1(A)$.

⌈2.) Sei $([p],[1_n])^\circ \in K_0(SA)$, also $p \in M_m(\widetilde{SA})$ Proj., $p(0) = p(1) = 1_n$
(bzw. $p(0) = p(1)$ Proj., o.E. diese 1_n)

d.h. $p(0) \sim_h p(1)$ via $(p(t))_{t \in [0,1]} \overset{2.6}{\Longrightarrow} \exists\, w \in M_m(\widetilde{SA})$ unitär
mit $w p(0) w^* = p(1)$

$\Rightarrow w \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix} = w p(0) = p(1) w = \begin{pmatrix} 1_n & \\ & 0 \end{pmatrix} w \Rightarrow w = \begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix}$.

⌊ Setze $\beta([p],[1_n])^\circ := [u] \in K_1(A)$.

3.) $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{K_0(SA)}$.

⌈3.) Sei $([p],[1_n])^\circ \in K_0(SA)$ mit $\beta([p],[1_n])^\circ = [u] \in K_1(A)$ wie in 2.)
Sei $p' : [0,1] \to M_{2n}(\tilde{A})$ für $\begin{pmatrix} u & \\ & u^* \end{pmatrix} \sim_h 1$ via (γ_t) wie in 1.)
$t \mapsto \gamma_t \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \gamma_t^*$

bzw: $\alpha \circ \beta([p],[1_n])^\circ = \alpha[u] = ([p'],[1_n])^\circ$ erfüllt $[p'] = [p]$.

7.8 Korollar: K_1 hat die gleichen Eigenschaften wie K_0.

7.9 $\boxed{\text{Berechnung:}}$ (a) $K_1(\mathbb{C}) = 0$ $\quad (U_0(M_n(\mathbb{C})) = U(M_n(\mathbb{C}))$, 1.5)

(b) $K_1(M) = 0$ für M vNAlg. ($u \in U(M_n(M))$, dann $u = e^{ih}$, $h = h^*$, nach messb. Fktlk., also $u \sim_h 1$)

(c) $K_0(C(S^1)) = \mathbb{Z}$. ~~$K_1(C(S^1))$~~

$$0 \longrightarrow S\mathbb{C} \longrightarrow C(S^1) \underset{\varphi \text{ (konst. Fkt)}}{\longrightarrow} \mathbb{C} \qquad \text{zerfallend}$$
$$f \longmapsto f \qquad f \longmapsto f(1)$$

(identifiziere $S^1 \setminus \{1\} \hat{=} (0,1)$)

$\overset{6.7}{\Longrightarrow} K_0(C(S^1)) = K_0(S\mathbb{C}) \oplus K_0(\mathbb{C}) \overset{7.7,}{=} K_1\mathbb{C} \oplus K_0(\mathbb{C}) \overset{3.10,(a)}{=} \mathbb{Z}$

(d)

	K_0		K_1	
$\bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C})$	$\mathbb{Z}^k$	(4.4)	0	(7.9)
$\mathcal{K}$	$\mathbb{Z}$	(5.8)	0	
$C[0,1]$	$\mathbb{Z}$	(4.9)	0	
$C([0,1],A)$	$K_0(A)$	(4.9)	$K_1(A)$	
$C_0(0,1]$	0	(4.9)	0	
CA	0	(4.9)	0	
$C_0(0,1)$	0	(7.8)	?	
SA	K_1A	(7.8)	?	
UHF	$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$	(5.8)	0	
M Typ I_∞, II_∞, III	0		0	(7.9)
M Typ II_1	$\mathbb{R}$		0	(7.9)
$\{f \in C([0,1], M_n(\mathbb{C})) \mid f(1) \text{ diag}\}$	$\mathbb{Z}^n$	(6.8)	0	
$C(S^1)$	$\mathbb{Z}$	(7.9)	?	
$B(H)/K(H) =: Q(H)$	?		?	