§8 Lange exakte Sequenzen

8.1 Def: A C^*-Algebra, X lokalkompakter Raum. $AX := C_0(X,A)$

8.2 Lemma: $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ exakt $\Rightarrow$ $0 \to IX \to AX \to BX \to 0$ exakt

Insbes. S exakter Funktor

Beweis: Zu $\varphi: C \to D$ setze $\varphi_X: CX \to DX$, $\varphi_X(f)(t) := \varphi(f(t))$.

ι_X inj.: ✓

Bild ι_X = Kern π_X: $f \in \text{Bild}\,\iota_X \iff f(t) \in \underset{\text{Kern}\,\pi}{\underbrace{\text{Bild}\,\iota}}\ \forall t \iff f \in \text{Kern}\,\pi_X$

π_X surj.: 1.) Zu $f \in C_0(X)$, $y \in B$ ex. $x \in A$ mit $\pi(x) = y$.
Setze $g(t) := f(t)x$ und $h(t) := f(t)y$. Dann $h = \pi_X(g) \in \text{Bild}\,\pi_X$.

2.) Nach Urysohn/Partition der Eins sind Linearkombinationen von Funktionen wie in 1.) dicht in BX, also $\pi_X(AX) \subseteq BX$ dicht, abgeschl. □

8.3 Def: $\alpha: A \to B$ $*$-Hom.

$C_\alpha := \{(x,y) \in A \oplus B[0,1) \mid \alpha(x) = y(0)\}$ Abbildungskegel

$Z_\alpha := \{(x,y) \in A \oplus B[0,1] \mid \alpha(x) = y(0)\}$ Abbildungszylinder

($C_\alpha \cong B[0,1)$ mit Startbedingung $\alpha(x)$)

8.4 Lemma: (a) α surj. $\Rightarrow$

$$0 \to \text{Kern}\,\alpha \to C_\alpha \xrightarrow{ev_y} B[0,1) \to 0 \quad \text{exakt}$$
$$x \mapsto (x,0)$$
$$(x,y) \mapsto y$$

$$0 \to SB \xrightarrow{\subseteq} C_\alpha \xrightarrow{ev_x} A \to 0 \quad \text{exakt}$$
$$y \mapsto (0,y)$$
$$(x,y) \mapsto x$$

12.11.2013

(b) α inj. $\Rightarrow$ $C_\alpha \cong \{y \in B[0,1) \mid y(0) \in \alpha(A)\}$

8.5 Lemma: (a) $Z_\alpha \xrightarrow{\varphi} A$, $(x,y) \mapsto x$; $A \xrightarrow{\psi} Z_\alpha$, $x \mapsto (x, \alpha(x)1)$ homotopieinvers (d.h. $\varphi \circ \psi = id_A$, $\psi \circ \varphi \sim_h id_{Z_\alpha}$)

Insbes. $K_0 A \cong K_0 Z_\alpha$

(b) $0 \to C_\alpha \xrightarrow{\subseteq} Z_\alpha \xrightarrow{\mu} B \to 0$ exakt
$$(x,y) \mapsto y(1)$$

(c) $K_0(C_\alpha) \xrightarrow{K_0(\pi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\alpha)} K_0(B)$ exakt

Bew.: (a) $\varphi_t : \underset{(x,y) \longmapsto (x, y_t)}{Z_\alpha \longrightarrow Z_\alpha}$, $y_t(s) := y(ts)$ (vgl. L4.7)

$\varphi_0(x,y) = (x, y(0)1) = (x, \alpha(x)1) = \nu \circ \varphi(x,y)$

$\varphi_1 = \mathrm{id}_{Z_\alpha}$

(b) ✓

(c) Nach (b) und 6.6:
$$\begin{tikzcd} K_0 C_\alpha \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, equal] & K_0 Z_\alpha \arrow[r, "K_0(\mu)"] \arrow[d, "K_0(\varphi)", "\cong\, 12(a)"'] & K_0 B \arrow[d, equal] \\ K_0(C_\alpha) \arrow[r, "K_0(ev_x)"'] & K_0 A \arrow[r, "K_0(\alpha)"'] & K_0 B \end{tikzcd}$$
exakt

Zz.: Das Diagramm kommutiert.

(i) $(x,y) \in C_\alpha$, dann $\varphi(x,y) = x = ev_x(x,y)$, also $K_0(\varphi)|_{K_0 C_\alpha} = K_0(ev_x)$

(Z_α beinhaltet Homotopien) ⟶ (ii) $\alpha \circ \varphi(x,y) = \alpha(x) = y(0) \sim_h y(1) = \mu(x,y)$

$\Rightarrow \alpha \circ \varphi \sim_h \mu$, d.h. $K_0(\alpha) \circ K_0(\varphi) = K_0(\mu)$ □

8.6 Lemma: Sei $0 \to I \xrightarrow{\subseteq} A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ exakt (d.h. $I = \ker \alpha$).

(a)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "e"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & SB \arrow[r] & C_\alpha \arrow[r, "ev_x"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
kommutiert

$e : \underset{x \longmapsto (x,0)}{I \longrightarrow C_\alpha}$ inj.

(b) $0 \to CI \to C_e \to SCB \to 0$ exakt

(c) $K_0(C_e) = 0$, $K_0(I) \xrightarrow{K_0(e)} K_0(C_\alpha)$ Isomorphismus

Bew.: (a) Nach Vor. ist α surj., also untere Zeile nach 8.4(a) exakt

$ev_x \circ e(x) = x$, also auch e inj.

(b) e inj. nach (a), also $C_e \cong \{ f \in C C_\alpha \mid f(0) \in eI = I \}$ nach 8.4(b) $\subseteq C(A \oplus CB)$

$CI \lhd C_e$ Ideal: Sei $f \in C_e$, $g \in CI = \{ g \in C C_\alpha \mid g(t) = (\underset{\in I}{g(t)_x}, 0) \} \subseteq C_e$

$(fg)(t) = \underbrace{f(t)}_{\in C_\alpha} \underbrace{g(t)}_{\in I \subseteq C_\alpha \text{ per } e} = (\underbrace{f(t)_x}_{\in A}, \underbrace{f(t)_y}_{\in B[0,1)})(\underbrace{g(t)_x}_{\in I}, 0) = (\underbrace{\underbrace{f(t)_x}_{\in A} \underbrace{g(t)_x}_{\in I}}_{\in I}, 0)$

$\Longrightarrow fg \in CI$

$C_e / CI \cong SCB$:

$C_e \ni f$, $f(t) = (\underset{\in A}{f(t)_x}, \underset{\in CB}{f(t)_y})$ mit $I \ni f(0) = (f(0)_x, 0)$

also $f(0)_y = 0$, d.h. $(t \mapsto f(t)_y) \in SCB$, also ex. $C_e \xrightarrow{\varphi} SCB$

mit Kern $\varphi = CI$.

(c) Nach (b) und 6.6 ist $K_0 CI \to K_0(C_e) \to K_0 SCB$ exakt

$$K_0 CI \overset{4.9}{=} 0, \qquad K_0 SCB \overset{7.7}{=} K_1 CB \overset{4.9 \,\&\, 7.8}{=} 0$$

$\Longrightarrow K_0(C_e) = 0$

Und nach 8.5(c) ist $K_0(C_e) \to K_0 I \xrightarrow{K_0(e)} K_0(C_\alpha)$ exakt, $K_0(C_e) = 0$

$\Longrightarrow K_0(e)$ inj.

Nach 8.4(a) $0 \to I \xrightarrow{e} C_\alpha \to CB \to 0$ exakt (α surj., $I = \ker\alpha$)

$\overset{6.6}{\Longrightarrow}$ $K_0 I \xrightarrow{K_0(e)} K_0 C_\alpha \to K_0 CB$ exakt, $K_0 CB \overset{4.9}{=} 0$

$\Longrightarrow K_0(e)$ surj. □

8.7 Satz: $0 \to I \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ exakt

$\Longrightarrow \dots \to K_0(S^2B) \to K_0(SI) \to K_0(SA) \to K_0(SB) \to K_0(I) \to K_0(A) \to K_0(B)$ exakt

Bew:

$$\begin{tikzcd}
 & & K_0 I \arrow[r] \arrow[d, "K_0(e)", "\cong 8.6(c)"'] & K_0 A \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_0(B) \\
 & K_0 SB \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "\cong 8.6(c)"'] & K_0 C_\alpha \arrow[r, "K_0(ev_x)"] \arrow[d, equal] & K_0 A & \\
K_0 SA \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & K_0 C_{ev_x} \arrow[r] & K_0 C_\alpha & &
\end{tikzcd}$$

(exakt nach Vor. & 6.6)

(exakt nach 8.4(a) & 6.6)

(exakt nach 8.4(a) & 6.6, $C_\alpha \xrightarrow{ev_x} A$)

(Beachte $\hat\alpha := ev_x : \underbrace{C_\alpha}_{=:\hat A} \to \underbrace{A}_{=:\hat B}$, also $0 \to S\hat B \to C_{\hat\alpha} \to \hat A \to 0$ exakt (8.4(a))
und $0 \to \underbrace{SB}_{=:\hat I} \to C_\alpha \xrightarrow{ev_x = \hat\alpha} A \to 0$ liefert $K_0 \hat I \cong K_0 C_{\hat\alpha}$ nach 8.6(c))

Definiere φ und ψ entsprechend. Überprüfe: $\psi = K_0(S_\alpha)$ □

8.8 = 6.7 Korollar: K_0 ist splitexakt.

(vgl. Bew. von 6.7 bzw.: "$K_0(\iota)$ inj.")

Bew: $0 \to I \xrightarrow{\iota} A \underset{\pi}{\overset{\varphi}{\leftrightarrows}} B \to 0$ exakt

$\overset{8.7}{\Longrightarrow}$ $K_0 SI \to K_0 SA \underset{K_0(S_\pi)}{\overset{K_0(S_\varphi)}{\leftrightarrows}} K_0 SB \xrightarrow{\psi} K_0 I \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0 A$ exakt

$\to$ $K_0(S_\pi)$ surj., da $K_0 S_\pi \circ K_0 S_\varphi = id$, also $\ker K_0(\iota) = \operatorname{Bild}\psi = 0$

denn $\ker\psi = \operatorname{Bild} S_\pi = K_0 SB$, d.h. $\psi = 0$. □

8.9 Korollar:

$$\begin{tikzcd}
K_0 I \arrow[r] & K_0 A \arrow[r] & K_0 B \\
K_1 B \arrow[u] & K_1 A \arrow[l] & K_1 I \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

exakt