§9 Exkurs: Nuklearität und Exaktheit

9.1 Def: A, B C^*-Algebren. Dann wird $A \odot B$ eine *-Algebra per $(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) := x_1 x_2 \otimes y_1 y_2$, $(x \otimes y)^* := x^* \otimes y^*$.

9.2 Def: (a) Seien $\pi_1 : A \hookrightarrow \mathcal{L}(H_1)$, $\pi_2 : B \hookrightarrow \mathcal{L}(H_2)$ treue Darstellungen.

$$\Big\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \Big\|_{min} := \Big\| \sum_{i=1}^n \pi_1(a_i) \otimes \pi_2(b_i) \Big\|_{\mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)}$$ minimale/spatial Norm

(b) $$\Big\| \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \Big\|_{max} := \sup \Big\{ \Big\| \sum_{i=1}^n \pi(a_i \otimes b_i) \Big\| \;\Big|\; \pi : A \odot B \to \mathcal{L}(H) \ ^*\text{-Hom} \Big\}$$ maximale Norm

9.3 Lemma: Die Normen aus 9.2 sind C^*-Normen und $A \otimes_{min} B$, $A \otimes_{max} B$ sind als deren Vervollständigungen von $A \odot B$ C^*-Algebren. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige C^*-Norm auf $A \odot B$. Dann $\|\cdot\|_{min} \leq \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{max}$. Außerdem ist $\|\cdot\|_{min}$ unabhängig von der Wahl von π_1, π_2.

9.4 Lemma: $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt, D C^*-Algebra
$\Rightarrow 0 \to I \otimes_{max} D \to A \otimes_{max} D \to B \otimes_{max} D \to 0$ exakt
d.h. $\cdot \otimes_{max} D$ ist ein exakter Funktor $\forall D$ C^*-Algebra.
Das ist i.A. nicht wahr für $\cdot \otimes_{min} D$.

9.5 Def: (a) A heißt nuklear, falls die C^*-Norm auf $A \odot B$ eindeutig ist, $\forall B$ C^*-Alg., falls also $A \otimes_{min} B = A \otimes_{max} B$ $\forall B$.
(b) A heißt exakt, falls $\cdot \otimes_{min} A$ ein exakter Funktor ist.

9.6 Lemma: (a) A nuklear $\Rightarrow$ A exakt
(b) A kommutativ $\Rightarrow$ A nuklear
(c) A endlichdim. $\Rightarrow$ A nuklear
(d) $A = \varinjlim A_n$, A_n nuklear $\Rightarrow$ A nuklear
(e) A AF $\Rightarrow$ A nuklear
(f) $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt. A nuklear $\Leftrightarrow$ I, B nuklear
(g) A, B einfach $\Rightarrow$ $A \otimes_{min} B$ einfach (i.A. falsch für $\otimes_{max}$)
(h) A exakt $\Leftrightarrow$ $\exists B \subseteq \mathcal{O}_2$ C^*-Unteralgebra : $A \cong B$

Bew: (a): $\otimes_{min} = \otimes_{max}$ & 9.4
(e): (d) & (c) $\square$

19.11.

9.7 Beispiele: (a) $\mathcal{K}$ (nach 9.6(e)), $C(S^1)$ (nach 9.6(b)), $\mathcal{T} := C^*(v \text{ Isometrie})$ nuklear
Toeplitzalgebra nach §9.6(f) und $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{T} \to C(S^1) \to 0$

$\mathcal{K} \cong \langle 1 - vv^* \rangle$, $v \mapsto \mathrm{id}_{S^1} = u$, $C(S^1) = C^*(u \text{ unitär})$

(b) $\mathcal{O}_n$ Cuntzalgebra nuklear

(c) G diskrete Gruppe. G amenabel $\Leftrightarrow C^*(G)$ nuklear
$\Leftrightarrow C^*(G) \cong C^*_{red}(G)$

(d) $C^*_{red} F_n$, $C^*_{red} S_n^+$, $C^*_{red} O_n^+$ exakt, nicht nuklear

(e) M Von-Neumann-Algebra. M nuklear $\Leftrightarrow M$ exakt
$\Leftrightarrow M = \bigoplus_{k=1}^{n} M_{n_k}(A_k)$, A_k abelsche VN-Alg.

(f) $C^*_{max}(\mathbb{F}_n)$ nicht exakt

9.8 Def: $\mathcal{N}$ sei die kleinste Klasse separabler, nuklearer C^*-Algebren A:
(i) $\mathbb{C} \in \mathcal{N}$
(ii) $\mathcal{N}$ abgeschl. unter stabilen Isomorphismen ($A \cong_s B :\Leftrightarrow A \otimes \mathcal{K} \cong B \otimes \mathcal{K}$)
(iii) $\mathcal{N}$ abgeschl. unter induktiven Limiten
(iv) $\mathcal{N}$ abgeschl. unter verschränkten Produkten mit $\mathbb{Z}$
(v) $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt, zwei von I, A, B in $\mathcal{N} \Rightarrow$ der dritte auch

$\mathcal{N}$ heißt Bootstrapklasse oder UCT-Klasse.

9.9 Satz (Rosenberg–Schochet 87): $A \in \mathcal{N}$. Dann ist
$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(K_i(A), K_i(B)) \xrightarrow{\delta} KK_i(A,B) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(K_i(A), K_i(B)) \to 0$ exakt
Universal Coefficient Theorem

9.10 Satz (Kirchberg–Phillips 2000): A, B unitale Kirchbergalgebren, d.h. A, B sind pi-sun (purely infinite, separabel, unital, nuklear), $A, B \in \mathcal{N}$.
$A \cong B \Leftrightarrow K_0 A \cong K_0 B$, $K_1 A \cong K_1 B$, $[1_A]_{K_0 A} = [1_B]_{K_0 B}$

9.11 Satz (Tikuisis, White, Winter 2017): A, B sep., unital, einfach, unendl.-dim., endl. nukl. Dim., in $\mathcal{N}$. $A \cong B \Leftrightarrow Ell(A) \cong Ell(B)$

9.12 Probleme: (a) A nukl., sep. $\Rightarrow A \in \mathcal{N}$?
(b) A purely infinite, nuklear, $K_0 A = K_1 A = 0 \Rightarrow A \cong \mathcal{O}_2$? (ja $\overset{\text{Kirchberg}}{\Leftarrow}$ 3(a))
(c) $C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{max} C^*(\mathbb{F}_\infty) = C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{min} C^*(\mathbb{F}_\infty)$? (ja $\Rightarrow$ Connes Embedding Problem)

(siehe Brown, Ozawa, C^*-algebras and finite-dimensional approximations für mehr Details zu Nuklearität, Exaktheit, $\otimes_{min}$, $\otimes_{max}$ etc)